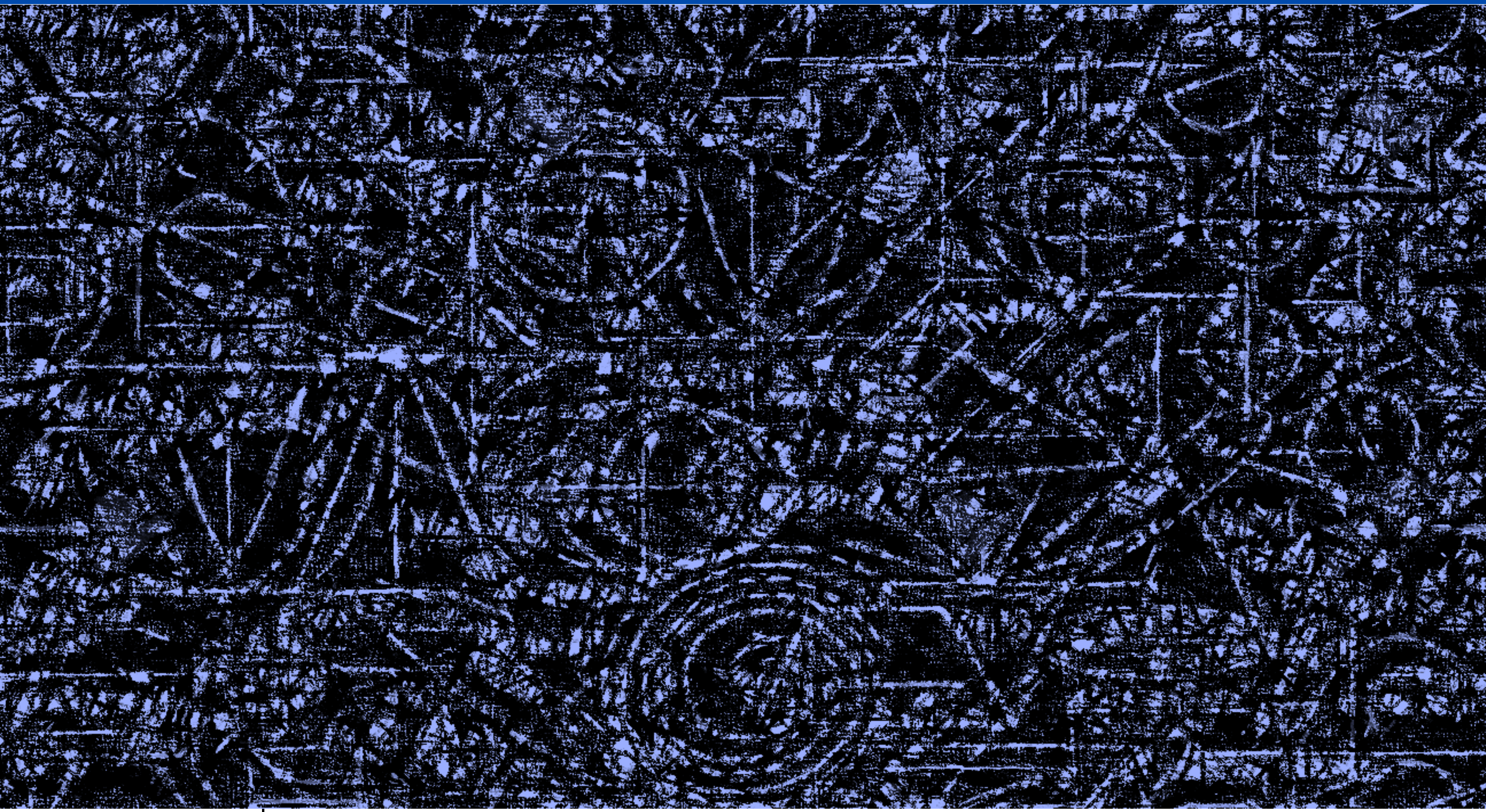
Relations

2



Introduction

Les relations sont rencontrées partout, que cela soit dans le monde des mathématiques ou dans la vraie vie.
En mathématiques, nous passons notre temps à comparer des objets, à les mettre en rapport les uns les autres selon tel ou tel aspect.
Par exemple, ces situations vous semblent familières : « $A \subset B$ », « $3 < \pi$ », « Lucie et Martin ont la même couleur de yeux », « $3 \mid 9$ », etc.

La notion de relation en mathématiques généralise toutes ces situations.

Prérequis

- Théorie naïve des ensembles (**chapitre 1**)

Objectifs du chapitre

- Introduire la notion de **couple** et du **produit cartésien**
- Etudier les propriétés du **produit cartésien**
- Introduire la notion de **relation**
- Etudier les **relations d'équivalence**
- Etudier les **relations d'ordre** et les éléments remarquables d'une telle relation

Le cours du chapitre 2

1 Couples

A Définition

La notion de couple est bien connue du lecteur. On peut le définir uniquement à partir des ensembles.

La **définition 1** est due au mathématicien polonais **Kazimierz Kuratowski** (1896-1980) qui l'a proposa en 1921.
Cette définition rigoureuse du couple permet de démontrer le **théorème 1**.

Définition 1

Soient x un élément d'un ensemble E et y un élément d'un ensemble F.
On appelle **couple** (x, y), l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Il est normal de se demander pourquoi une telle définition. Le mathématicien américain **Norbert Weiner** (1894-1964) fut le premier à remarquer que la notion de couple pouvait se définir en termes ensemblistes et qu'il n'était donc pas nécessaire d'introduire cette notion comme une notion première.
Plusieurs définitions sont possibles, mais la plus courante et celle présentée dans la **définition 1**.

Remarques

1. Le couple (x, y) est la donnée dans cet ordre des éléments x et y.
2. Dans la notion (x, y), l'élément x est appelé **première composante** du couple et l'élément y la **seconde composante** du couple.
3. Si les éléments x et y sont distincts, il paraît clair que, d'après la **définition 1**, les objets (x, y), (y, x) et $\{x, y\}$ sont deux à deux distincts.
4. Le couple (x, x) désigne le singleton $\{\{x\}\}$.

Le lecteur peut le vérifier en exercice.

B Propriété caractéristique des couples

Le **théorème 1** est important pour la suite du cours.

Théorème 1

Soient x et x' deux éléments d'un ensemble E, y et y' deux éléments d'un ensemble F.

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Preuve

$(\Rightarrow)$ Supposons que $(x, y) = (x', y')$.
Traitions d'abord le cas où $x = y$.
Alors $(x, y) = \{\{x\}\}$ et donc le couple (x, y) est composé que d'un seul élément.
Il vient donc que le couple (x', y') est composé lui aussi d'un seul élément et donc que $x' = y'$.
Finalement, on a $\{\{x\}\} = \{\{x'\}\}$, d'où $x = x'$ et donc $x = x' = y = y'$.
Traitons le cas où $x \neq y$.
Dans ce cas, le couple (x, y) est composé de deux éléments et il en est de même pour le couple (x', y'), d'où $x' \neq y'$.
Comme on a l'égalité $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, deux possibilités s'offrent à nous :
- ou bien $\{x\} = \{x'\}$ et $\{x, y\} = \{x', y'\}$;
- ou bien $\{x\} = \{x', y'\}$ et $\{x, y\} = \{x'\}$.

Dans le premier cas, on a $x = x'$ et donc $y = y'$.
Dans le second cas, il y a conflit, car les ensembles $\{x\}$ et $\{x', y'\}$ d'une part et les ensembles $\{x, y\}$ et $\{x'\}$ d'autre part n'ont pas le même cardinal alors qu'ils sont supposés égaux...
$(\Leftarrow)$ Evident. □

2 Produit cartésien de deux ensembles

A Définition

Nous admettons dans cette définition l'existence du produit cartésien formé à partir de deux ensembles.
Pour le prouver, il aurait fallu faire appel à plusieurs axiomes de la théorie des ensembles (par exemple à l'axiome de l'ensemble des parties et à l'axiome de la réunion).

Définition 2

Soient E et F deux ensembles.
On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble :

$$\{(x, y), (x \in E) \wedge (x \in F)\}.$$

Remarques

1. Le produit cartésien de E par F se note $E \times F$ (lire « E croix F »).
2. Contrairement à la réunion ou à l'intersection, le produit cartésien de deux ensembles n'est pas une opération qui lie deux ensembles, mais c'est un nouvel ensemble formé de couples.
3. Lorsque $E = F$, on note habituellement E^2 l'ensemble $E \times E$.

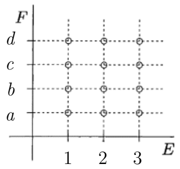
Exemple

Les lettres a, b, c et d désignant des nombres, considérons les ensembles E et F définis par les égalités :

$$E = \{1, 2, 3\} \text{ et } F = \{a, b, c, d\}.$$

On a par définition :

$$E \times F = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}.$$



On peut représenter (voir ci-contre), le produit cartésien $E \times F$ par un dessin appelé **diagramme cartésien**.
Les « petits cercles » désignent les 12 couples de $E \times F$.
Ce diagramme permet notamment de déterminer tous les couples de $E \times F$ selon deux types de balayage : horizontal ou vertical.
Si le **balayage est horizontal** :

$$E \times F = \underbrace{\{(1,a),(2,a),(3,a)\}}_{E\times\{a\}} \cup \underbrace{\{(1,b),(2,b),(3,b)\}}_{E\times\{b\}} \cup \underbrace{\{(1,c),(2,c),(3,c)\}}_{E\times\{c\}} \cup \underbrace{\{(1,d),(2,d),(3,d)\}}_{E\times\{d\}}.$$

Si le **balayage est vertical** :

$$E \times F = \underbrace{\{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d)\}}_{\{1\}\times F} \cup \underbrace{\{(2,a),(2,b),(2,c),(2,d)\}}_{\{2\}\times F} \cup \underbrace{\{(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}}_{\{3\}\times F}.$$

B Propriétés du produit cartésien de deux ensembles

Les propriétés du produit cartésien sont nombreuses et peu utiles en pratique.

Théorème 2

Soient E et F deux ensembles.

1) $E \times F = \varnothing \Leftrightarrow ((E = \varnothing) \vee (F = \varnothing))$ 2) $E \times F = F \times E \Leftrightarrow ((E = \varnothing) \vee (F = \varnothing) \vee (E = F))$.

Preuve

Utilisation de la tautologie :
$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$,
où P et Q sont des assertions.

1) Cela revient au même de montrer l'équivalence :

$$E \times F \neq \varnothing \Leftrightarrow ((E \neq \varnothing) \wedge (F \neq \varnothing)).$$

Ce qui devient immédiat. En effet, si l'on suppose que l'ensemble $E \times F$ n'est pas vide, alors il existe un couple (x, y) de $E \times F$, c'est-à-dire un élément x de E et un élément y de F.
Par conséquent, les ensembles E et F ne sont pas vides.
L'implication réciproque se montre comme on vient de le faire.
2) ($\Rightarrow$) Supposons que $E \times F = F \times E$.

Raisonnement par l'absurde.

Si deux ensembles sont distincts, alors un des deux ensembles n'est pas inclus dans l'autre, autrement dit, il existe un élément de l'un qui n'est pas dans l'autre.

Supposons aussi que les ensembles E et F sont non vides et distincts.
Il existe alors un élément x de E qui n'appartient pas à l'ensemble F (ou un élément y de F qui n'appartient pas à E). Et puisque F est non vide, il existe un couple (x, y) de l'ensemble $E \times F$ c'est-à-dire, compte tenu de l'hypothèse de départ, de l'ensemble $F \times E$.
Mais alors x serait un élément de F, contradiction.
($\Leftarrow$) Evident compte tenu de 1). □

Remarque

C'est systématiquement le cas quand les ensembles E et F sont non vides et distincts.

Attention, compte tenu de ce qui précède, il est possible que les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ ne soient pas égaux.

Le **théorème 3** fait penser à la distributivité et donne donc un bon moyen de le retenir.

Théorème 3

Soient E, F et G des ensembles.

1) $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$ 2) $(F \cup G) \times E = (F \times E) \cup (G \times E)$.

Preuve

1) Soit un couple (x, y) appartenant à l'ensemble $E \times (F \cup G)$.

On a les équivalences suivantes : $(x,y) \in E \times (F \cup G) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (y \in F \cup G))$

$$\Leftrightarrow ((x \in E) \wedge ((y \in F) \vee (y \in G)))$$

Le cours du chapitre 2

On rappelle que pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on peut établir l'équivalence :
$\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F$.

$$\Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (y \in F)) \vee ((x \in E) \wedge (y \in G))$$
$$\Leftrightarrow ((x, y) \in E \times F) \vee ((x, y) \in E \times G)$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in (E \times F) \cup (E \times G) .$$

2) Comme en 1). □

Théorème 4

Soient E, F et G des ensembles.

1) $E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$ 2) $(F \cap G) \times E = (F \times E) \cap (G \times E)$.

Preuve

1) Soit un couple (x, y) appartenant à l'ensemble $E \times (F \cap G)$.

On a les équivalences suivantes : $(x, y) \in E \times (F \cap G) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (y \in F \cap G))$

$$\Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (y \in F \textit{ et } y \in G))$$
$$\Leftrightarrow (x \in E) \wedge (y \in F) \wedge (x \in E) \wedge (y \in G)$$
$$\Leftrightarrow ((x, y) \in E \times F) \wedge ((x, y) \in E \times G)$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in (E \times F) \cap (E \times G) .$$

Utilisation de la tautologie :
$P \Leftrightarrow P \wedge P$,
où P est une assertion.

2) Comme en 1). □

Le **théorème 5** fournit une formule pour l'intersection de deux produits cartésiens.

Théorème 5

Soient E, F, G et H des ensembles.

$$(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H) .$$

Preuve

On part ici du membre de droite.

Soit un couple (x, y) appartenant à l'ensemble $(E \cap G) \times (F \cap H)$.

On a les équivalences suivantes : $(x, y) \in (E \cap G) \times (F \cap H) \Leftrightarrow (x \in E \cap G) \wedge (y \in F \cap H)$

$$\Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \in G) \wedge (y \in F) \wedge (y \in H)$$
$$\Leftrightarrow (x \in E) \wedge (y \in F) \wedge (x \in G) \wedge (y \in H)$$
$$\Leftrightarrow ((x, y) \in E \times F) \wedge ((x, y) \in G \times H)$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in (E \times F) \cap (G \times H) .$$
□

Remarque

Voir l'**exercice 6** pour une formule.

Il n'y a pas de formule « simple » pour la réunion $(E \times F) \cup (G \times H)$.

En particulier, il est possible que $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$. En effet, en prenant par exemple :

$$E = F = \{0\} \text{ et } G = H = \{1\} ,$$

on a :

- $(E \times F) \cup (G \times H) = \{(0, 0)\} \cup \{(1, 1)\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$;
- $(E \cup G) \times (F \cup H) = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Faire attention aux hypothèses du **théorème 6**.

Théorème 6

Soient A, B, E et F des ensembles non vides.

$$\begin{cases} A \subset E \\ B \subset F \end{cases} \Leftrightarrow A \times B \subset E \times F .$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que $A \subset E$ et $B \subset F$.

Utilisation du **théorème 5**.

On a : $(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F) = A \times B$.

Donc $A \times B \subset E \times F$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A \times B \subset E \times F$.

Comme les ensembles A et B ne sont pas vides, il existe un élément x de A et un élément y de B et donc un couple (x, y) du produit cartésien $A \times B$.

Via l'hypothèse de départ, ce couple appartient au produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire, que l'élément x appartient à E et l'élément y appartient à F.

Ainsi, $A \subset E$ et $B \subset F$. □

Le cours du chapitre 2

Le sens direct du **théorème 6** reste encore vrai même si l'un des ensembles est vide.

Remarque
La réciproque du **théorème 6** devient faux si on ne suppose pas que les ensembles soient vides.
En effet, en choisissant $A=\{1\}$, $B=\varnothing$, $E=F=\{2\}$, on a bien $A\times B\subset E\times F$ mais l'ensemble A n'est pas une partie de E.

3 Produit cartésien de plusieurs ensembles

A Notion de n-uplet

A partir de la notion de couple, il est possible de définir le **triplet**, le **quadruplet**, etc.

Définition 3

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $E_1,\dots,E_n$ des ensembles.
Pour tout $x_1\in E_1,\dots,x_n\in E_n$, on appelle **n-uplet** le couple :
$$(\dots((x_1,x_2),x_3),\dots,x_n).$$

Le n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ est la donnée des éléments $x_1,\dots,x_n$ dans cet ordre.

Remarques
1. Pour $x_1\in E_1,\dots,x_n\in E_n$, le n-uplet se note plutôt $(x_1,\dots,x_n)$ au lieu de $(\dots((x_1,x_2),x_3),\dots,x_n)$.
2. On convient le 0-uplet est l'ensemble vide.
3. Pour un ensemble E, un 1-uplet désigne un élément de E.

Exemples
1. Le triplet (x_1,x_2,x_3) correspond au couple $((x_1,x_2),x_3)$.
2. Le quadruplet (x_1,x_2,x_3,x_4) correspond au couple $(((x_1,x_2),x_3),x_4)$.

B Produit cartésien de plusieurs ensembles

La **définition 4** généralise la **définition 2** définissant le produit cartésien de deux ensembles.

Définition 4

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $E_1,\dots,E_n$ des ensembles.
On appelle **produit cartésien** des ensembles $E_1,\dots,E_n$ (dans cet ordre) l'ensemble :
$$\{(x_1,\dots,x_n),x_1\in E_1,\dots,x_n\in E_n\}.$$

Remarques
1. Le produit cartésien des ensembles $E_1,\dots,E_n$ dans cet ordre se note $E_1\times\dots\times E_n$.
2. Lorsque tous les ensembles sont égaux dans le produit cartésien (par exemple à E), on note E^n (où n désigne le nombre d'ensembles) au lieu de $\underbrace{E\times\dots\times E}_{n\text{ fois}}$.

Par exemple $E\times E\times E$ sera plutôt noté E^3.

Le **théorème 7** généralise le premier théorème sur la caractéristique des couples.

Théorème 7

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $E_1,\dots,E_n$ des ensembles, $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux n-uplets de $E_1\times\dots\times E_n$.
$$(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)\Leftrightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},x_i=y_i.$$

Preuve
($\Rightarrow$) Récurrence immédiate sur n.
Pour $n=1$ et $n=2$ c'est vérifié.

Le cas où $n=2$ est le **théorème 1**.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que :
$$(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)\Rightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},x_i=y_i.$$
Considérons $n+1$ ensembles $E_1,\dots,E_{n+1}$ et deux $n+1$-uplet $(x_1,\dots,x_{n+1})$ et $(y_1,\dots,y_{n+1})$ de $E_1\times\dots\times E_{n+1}$ tels que :
$$(x_1,\dots,x_{n+1})=(y_1,\dots,y_{n+1}).$$

Utilisation de la propriété caractéristique des couples.

Par définition, on a $((x_1,\dots,x_n),x_{n+1})=((y_1,\dots,y_n),y_{n+1})$, c'est-à-dire que $(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$ et $x_{n+1}=y_{n+1}$, autrement dit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$\forall i\in\{1,\dots,n+1\},x_i=y_i.$$
($\Leftarrow$) Evident. □

Le cours du chapitre 2

4 Relations

Cette notion est le point central de ce chapitre.

A Définitions

Définition 5

Soient E et F deux ensembles.
On appelle **relation** de E vers F tout sous-ensemble du produit cartésien $E\times F$.

On parle aussi de **correspondance** au lieu de relation.

Remarques

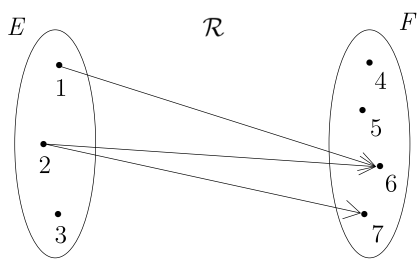
1. On désignera par une lettre une relation (par exemple, la lettre $\mathcal{R}$ très souvent).
2. E est appelé l'**ensemble de départ** de la relation.
3. F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de la relation.
4. Une relation est aussi appelé **graphe**.
5. Une relation peut être vide, mais ce cas ne nous intéressera pas.
6. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations.

Ce cas se produit systématiquement si l'ensemble de départ ou si l'ensemble d'arrivée est vide.

On dira que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont égales quand :
- elles ont le même ensemble de départ (qu'on notera E) ;
- elles ont le même ensemble d'arrivée (qu'on notera F) ;
- $\forall(x,y)\in E\times F, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{S}\,y$.

Exemples

1. Considérons les ensembles E et F définis par les égalités :
$$E=\{1,2,3\} \text{ et } F=\{4,5,6,7\}\,.$$
On sait déterminer le produit cartésien de E par F :
$$E\times F=\{(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7)\}\,.$$
En notant (par exemple) $\mathcal{R}=\{(1,6),(2,6),(2,7)\}$, on établit une relation de E vers F.
On peut représenter cette relation par un **diagramme sagittal** :



Intuitivement, une relation de E vers F c'est comme se créer des chemins allant d'un élément de l'ensemble E vers un élément de l'ensemble F.

Le sens des flèches a une importance. Par exemple, une flèche part de 1 et arrive à 6. Cela signifie que le couple $(1,6)$ appartient à $\mathcal{R}$. Au lieu d'écrire que $(1,6)\in\mathcal{R}$, on écrira $1\,\mathcal{R}\,6$.
On a aussi, $2\,\mathcal{R}\,6$ et $2\,\mathcal{R}\,7$. Mais attention l'ordre des éléments qui sont en relation a une importance ! C'est ainsi que par exemple, on n'a pas $6\,\mathcal{R}\,1$ (puisque $(6,1)\notin\mathcal{R}$).
Dans cet exemple et d'une manière générale, il paraît clair que $\mathcal{R}=\{(x,y)\in E\times F, x\,\mathcal{R}\,y\}$.

2. Essayons de comprendre l'écriture $4\leqslant 10$ (où les nombres 4 et 10 appartiennent à $\mathbb{R}$).
L'écriture $4\leqslant 10$ signifie que $(4,10)\in\leqslant$ où $\leqslant$ est une partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3. Essayons de comprendre l'écriture $A\subset B$ (où A et B sont des sous-ensembles d'un ensemble E).
L'écriture $A\subset B$ signifie que $(A,B)\in\subset$ où $\subset$ est une partie de $\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)$.

Cela vous semble peut-être surprenant mais les symboles $\leqslant$ et $\subset$ sont ici vus comme des ensembles.

Définition 6

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers un ensemble F.
On appelle **relation complémentaire** de $\mathcal{R}$, noté $\not{\mathcal{R}}$, la relation de E vers F définie par :
$$\forall(x,y)\in E\times F, x\,\not{\mathcal{R}}\,y \Leftrightarrow \neg(x\,\mathcal{R}\,y)\,.$$

La relation définie dans la **définition 6** est peu utilisée en pratique.

Remarques

1. $\not{\mathcal{R}}$ se lit « R barré ».
2. Il est clair que $\not{\mathcal{R}}=\complement_{E\times F}\mathcal{R}$.
3. Il est aussi clair que $\mathcal{R}\cup\not{\mathcal{R}}=E\times F$.

B Composition de deux relations

A partir de deux relations, on peut en construire une troisième. C'est l'objet de la définition suivante.

La **définition 7** est délicate et se comprend avec un dessin.

Définition 7

Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{S}$) une relation d'un ensemble E vers un ensemble F (resp. d'un ensemble F vers un ensemble G).
On appelle **relation composée** de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, la relation de E vers G notée $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ définie par :

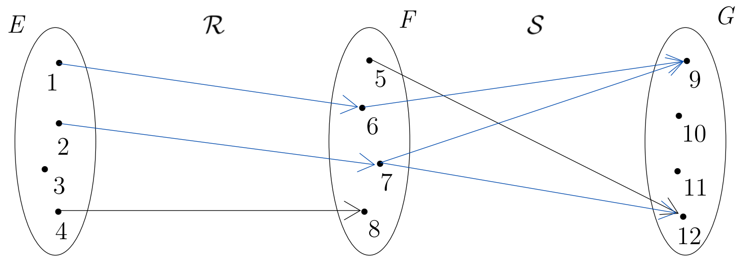
$$\forall (x,z)\in E\times G, x\,\mathcal{S}\circ\mathcal{R}\,z \Leftrightarrow \exists y\in F, \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{S}\,z \end{cases}.$$

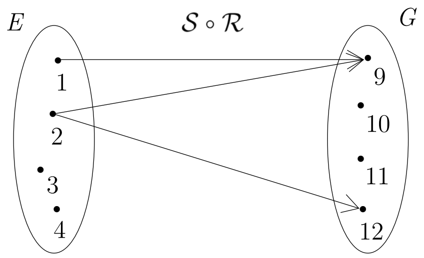
Exemple

Considérons les ensembles E, F et G définis par les égalités suivantes :

$$E=\{1,2,3,4\}\,,\ \ F=\{5,6,7,8\}\ \text{ et }\ G=\{9,10,11,12\}\,.$$

Les flèches représentées en bleu mettent en évidence un élément de E en relation avec un élément de G en passant par un élément de F.





Le **théorème 9** fait penser à l'associativité de l'intersection ou de la réunion dans l'ensemble des parties d'un ensemble.

Théorème 9 Associativité de la composition de relations

Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{T}$) une relation d'un ensemble E vers un ensemble F (resp. d'un ensemble F vers un ensemble G, resp. d'un ensemble G vers un ensemble H).

$$\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})=(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}\,.$$

Preuve

Les relations $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$ ont le même ensemble de départ (E) et le même ensemble d'arrivée (H).
Soient x un élément de E et t un élément de H.

On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} x\,(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}\,t &\Leftrightarrow \exists y\in F, \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\,t \end{cases} \Leftrightarrow \exists y\in F, \exists z\in G, \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{S}\,z \\ z\,\mathcal{T}\,t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists z\in G \begin{cases} x\,\mathcal{S}\circ\mathcal{R}\,z \\ z\,\mathcal{T}\,t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x\,\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})\,t\,. \end{aligned}$$
□

C Relation réciproque

Définition 8

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers un ensemble F.
On appelle **relation réciproque** de $\mathcal{R}$, la relation de F vers E notée $\mathcal{R}^{-1}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in E\times F, y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y\,.$$

Exemples

1. Avec $E=F=\mathbb{R}$ et $\mathcal{R}=\leqslant$, on a $\mathcal{R}^{-1}=\geqslant$, en effet :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, y\geqslant x \Leftrightarrow x\leqslant y\,.$$

2. Avec E un ensemble et $\mathcal{R} = \subset$, on a $\mathcal{R}^{-1} = \supset$, en effet :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, B \supset A \Leftrightarrow A \subset B\,.$$

3. Si $\mathcal{R}$ est la relation d'égalité définie dans n'importe quel ensemble, alors $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.

Théorème 10

Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{S}$) une relation d'un ensemble E vers un ensemble F (resp. d'un ensemble F vers un ensemble G).

$$1)\ (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R} \qquad 2)\ (\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}\,.$$

Preuve

1) Les relations $\mathcal{R}$ et $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$ ont le même ensemble de départ (E) et le même ensemble d'arrivée (F).

Soit x un élément de E et y un élément de F.

On a les équivalences suivantes : $x\,(\mathcal{R}^{-1})^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y$.

2) Les relations $(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}$ et $\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}$ ont le même ensemble de départ (G) et le même ensemble d'arrivée (E).

Soit x un élément de E et z un élément de G.

On a les équivalences suivantes : $z\,(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{S}\circ\mathcal{R}\,z \Leftrightarrow \exists y\in F, \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{S}\,z \end{cases} \Leftrightarrow \exists y \in F, \begin{cases} y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \\ z\,\mathcal{S}^{-1}\,y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \exists y\in F, \begin{cases} z\,\mathcal{S}^{-1}\,y \\ y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z\,\mathcal{R}^{-1}\circ\mathcal{S}^{-1}\,x\,. \qquad \square$$

D Relation induite

Définition 9

La plupart des relations en mathématiques sont des relations binaires.

On appelle **relation binaire** toute relation dont l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée.

Remarque

De ce qui précède, au lieu de dire « soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers lui-même », on dire simplement « soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E ».

La **définition 10** est rarement utilisée en pratique.
Intuitivement, on définit dans un sous-ensemble « la même relation » que dans l'ensemble de référence.

Définition 10

Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E et A un sous-ensemble de E.

On appelle **relation induite** de $\mathcal{R}$ sur A, la relation binaire sur A notée $\mathcal{R}_A$ définie par :

$$\forall (x,y)\in A^2, x\,\mathcal{R}_A\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y\,.$$

E Relations remarquables

Définition 11

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

1) Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **réflexive** signifie que : $\forall x\in E, x\,\mathcal{R}\,x$.

On dit aussi **irréflexive**.

2) Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **antiréflexive** signifie que : $\forall x \in E, x\,\not{\mathcal{R}}\,x$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation de comparaison $\leqslant$ est réflexive.
2. Dans $\mathbb{R}$, la relation $\neq$ est antiréflexive.
3. Pour tout ensemble E, la relation d'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation réflexive.

Remarques

1. Attention à ne pas croire qu'une relation qui n'est pas réflexive est une relation qui est antiréflexive. En particulier, une relation peut bien n'être ni l'un ni l'autre !

C'est par exemple le cas avec la relation « est l'opposé de » définie sur $\mathbb{R}$.

2. Il est impossible (sauf si on travaille dans l'ensemble vide...) qu'une relation soit à la fois réflexive et antiréflexive (principe de non-contradiction).

Le cours du chapitre 2

Définition 12

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

1) Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **symétrique** signifie que : $\forall (x,y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.

2) Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** signifie que : $\forall (x,y) \in E^2, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \Rightarrow x = y$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation de comparaison $\leqslant$ n'est pas symétrique.
2. La relation d'égalité définie dans n'importe quel ensemble est une relation symétrique.
3. Dans $\mathbb{R}$, la relation de comparaison $\leqslant$ est antisymétrique.
4. Pour tout ensemble E, la relation d'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation antisymétrique.

Remarque

Même lorsque E n'est pas vide, une relation peut être à la fois symétrique et antisymétrique ; c'est notamment le cas de la relation d'égalité.

Mais attention, la relation d'égalité n'est pas la seule à remplir ces deux conditions ! Il existe une infinité de relation qui sont symétriques et antisymétriques.

Un raisonnement faux serait de croire qu'une relation symétrique et antisymétrique est nécessairement la relation d'égalité.

Définition 13

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

1) Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **transitive** signifie que : $\forall (x,y,z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

2) Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **antitransitive** signifie que : $\forall (x,y,z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \not\mathcal{R} z$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation de comparaison $\leqslant$ est une relation transitive.
2. Dans l'ensemble des droites du plan, la relation d'orthogonalité $\perp$ est une relation antitransitive.

Remarques

1. Attention à ne pas croire qu'une relation qui n'est pas transitive est une relation antitransitive. En particulier, une relation peut bien n'être ni l'un ni l'autre !

C'est le cas avec la relation $\neq$ définie sur $\mathbb{R}$.

2. Il est impossible (sauf si on travaille dans l'ensemble vide...) qu'une relation soit à la fois transitive et antitransitive (principe de non-contradiction).

5 Relations d'équivalence

A Définitions

Définition 14

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

Dire que la relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** signifie qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Pour retenir : RST.

Exemples

1. La relation d'égalité définie dans un ensemble quelconque E est une relation d'équivalence.
2. Dans $\mathbb{R}$, la relation usuelle $\leqslant$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique.

Remarque

Comme vous l'avez constaté, les exemples ne sont pas nombreux pour cette notion pourtant très importante. Au fur et à mesure des chapitres (et dans les exercices), nous rencontrerons beaucoup de relations d'équivalence.

La **définition 15**, délicate, est très importante pour la suite.

Définition 15

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.

Pour tout x de E, on appelle **classe d'équivalence** de x (modulo $\mathcal{R}$) l'ensemble :

$$\{y \in E, x \mathcal{R} y\} .$$

Le cours du chapitre 2

On rencontre aussi les notations $\overline{x}$, $\dot{x}$ et $\hat{x}$.

Remarques

1. La classe d'équivalence d'un élément x modulo $\mathcal{R}$ se note $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x)$ ou $\mathrm{Cl}(x)$ s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté.
2. Tout élément d'une classe d'équivalence est appelé **représentant**.

Exemples

1. Dans tout ensemble E, la relation d'égalité est une relation d'équivalence. Pour tout x de E, on a $\mathrm{Cl}_{=}(x) = \{x\}$.
2. Dans l'ensemble des droites du plan, la relation de parallélisme est une relation d'équivalence.
Pour toute droite D de cet ensemble de droites, sa classe d'équivalence modulo le parallélisme est appelé la **direction** de la droite D.
3. Dans l'ensemble E, la relation $\mathcal{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, x\,\mathcal{R}\,y$ est une relation d'équivalence (la vérification est immédiate).
Pour tout x de E, on a $\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) = E$.

La **définition 16** est très importante. Elle permet de construire de nouveaux ensembles à l'aide d'une relation d'équivalence.

Définition 16

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.
On appelle **ensemble-quotient** de E par $\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Remarques

1. L'ensemble-quotient de E par $\mathcal{R}$ se notera $E/\mathcal{R}$.
2. Par définition, on a $E/\mathcal{R} = \{\mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x), x \in E\}$.
3. On remarque facilement que $E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$.

Exemples

1. Pour la relation d'égalité définie dans n'importe quel ensemble E, on a $E/\!= \;= \{\{x\}, x \in E\}$.
2. Pour la relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E par : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y$, on a $E/\mathcal{R} = \{E\}$.

B Propriétés

Il existe plein de propriétés sur les relations d'équivalences. Nous nous proposons dans ce cours d'en démontrer un certain nombre et d'autres en exercice.

La démonstration du **théorème 11** est immédiate.

Théorème 11

Soient $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) une relation d'équivalence définie sur un ensemble E (resp. sur un ensemble F).
La relation $\mathcal{R}$ sur $E \times F$ définie par :

$$\forall (x,y),(x',y') \in E \times F, (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x\,\mathcal{R}_1\,x' \\ y\,\mathcal{R}_2\,y' \end{cases},$$

est une relation d'équivalence.

Remarque

La relation définie précédemment s'appelle **équivalence-produit** des relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Théorème 12

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.

1) $\forall x \in E, \mathrm{Cl}(x) \neq \varnothing$ 2) $\forall (x,y) \in E^2, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$ 3) $\forall (x,y) \in E^2, x \not\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow \mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) = \varnothing$.

La première affirmation dit qu'une classe n'est jamais vide. La deuxième dit que deux éléments en relation sont dans la même classe et la dernière affirme que deux éléments qui ne sont pas en relation ont des classes disjointes.

Preuve

1) Quel que soit l'élément x de E, on a $x \in \mathrm{Cl}(x)$ et donc $\mathrm{Cl}(x) \neq \varnothing$.

2) ($\Rightarrow$) Supposons que $x\,\mathcal{R}\,y$.

Soit z un élément de $\mathrm{Cl}(x)$.

Par définition, on a $z\,\mathcal{R}\,x$.

Puis, comme on sait que $x\,\mathcal{R}\,y$, par transitivité on a $z\,\mathcal{R}\,y$, c'est-à-dire que $z \in \mathrm{Cl}(y)$, d'où $\mathrm{Cl}(x) \subset \mathrm{Cl}(y)$.

Par symétrie, on a aussi $\mathrm{Cl}(y) \subset \mathrm{Cl}(x)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$.

Comme $x \in \mathrm{Cl}(x)$, $x \in \mathrm{Cl}(y)$, c'est-à-dire que $x \mathcal{R} y$.

3) ($\Rightarrow$) Supposons que $x \not\mathcal{R} y$.

Raisonnement par l'absurde.

Admettons que $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) \neq \varnothing$.

Alors il existe un élément z de $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y)$, c'est-à-dire $z \in \mathrm{Cl}(x)$ et $z \in \mathrm{Cl}(y)$, ou encore $z \mathcal{R} x$ et $z \mathcal{R} y$.

Par la symétrie et la transitivité de la relation $\mathcal{R}$, il vient que $x \mathcal{R} y$, contradiction.

Donc on a bien $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) = \varnothing$.

($\Leftarrow$) On va montrer par contraposition que si $x \mathcal{R} y$, alors $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) \neq \varnothing$.

Compte tenu de 2), si $x \mathcal{R} y$, alors $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$ et donc $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x)$.

Enfin, comme $\mathrm{Cl}(x) \neq \varnothing$ (vu en 1)), on a le résultat annoncé. □

6 Relations d'ordre

A Généralités

Définition 17

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

Dire que la relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** signifie qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Pour retenir : RAT.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation de comparaison $\leqslant$ est une relation d'ordre.
2. Pour tout ensemble E, la relation d'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.

Remarques

1. On parle souvent d'**ordre** au lieu de relation d'ordre.
2. En général, une relation d'ordre est notée « $\preccurlyeq$ » (qu'on prononcera par abus « inférieur ou égal »).
3. Un **ensemble ordonné** est un couple $(E,\preccurlyeq)$ où $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre dans l'ensemble E.

On pourra confondre l'ensemble E avec le couple $(E,\preccurlyeq)$ par abus.
Par exemple, on dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné par l'ordre usuel.

Définition 18

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

Dire que deux éléments x et y de E sont **comparables** pour la relation $\preccurlyeq$ signifie que :

$$x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x.$$

Exemples

1. Deux nombres réels sont toujours comparables pour l'ordre usuel.
2. Si E est un ensemble ayant au moins deux éléments, deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ peuvent ne pas être comparables pour la relation d'inclusion.
En effet, si $E = \{1,2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},E\}$, mais les singletons $\{1\}$ et $\{2\}$ ne sont pas comparables pour la relation d'inclusion.
3. Dans $\mathbb{N}$, par la relation de divisibilité (qui est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$), les nombres 2 et 3 ne sont pas comparables.

En effet, on n'a ni $2 \mid 3$, ni $3 \mid 2$.

Définition 19

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

Dire que la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est **totale** signifie que :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x \preccurlyeq y) \vee (y \preccurlyeq x).$$

Autrement dit, tous les éléments de l'ensemble qui est ordonné sont comparables deux à deux.

Remarque

1. Une relation qui n'est pas d'ordre total est appelé relation d'**ordre partiel**.
2. Un ensemble **totalement ordonné** est un ensemble ordonné $(E,\preccurlyeq)$ où $\preccurlyeq$ est un ordre total sur E.

Exemples

1. Le couple $(\mathbb{R},\leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.
2. Lorsque E est un ensemble de cardinal 2 ou plus, l'inclusion est une relation d'ordre partiel dans $\mathcal{P}(E)$.
3. Dans $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel.

Le cours du chapitre 2

L'**exercice 7** donne une alternative pour la **définition 20**.

Définition 20

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

On appelle **ordre strict** associé à la relation d'ordre $\preccurlyeq$, la relation binaire définit sur E, notée $\prec$, définie par :

$$\forall (x,y)\in E^2, x\prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x\preccurlyeq y \\ x\neq y \end{cases}.$$

Remarque

Attention, bien que le nom laisse le croire, un ordre strict associé à une relation d'ordre n'est pas une relation d'ordre (sauf si on travaille dans l'ensemble vide...).

En particulier, une telle relation n'est pas réflexive (mais elle est antisymétrique et transitive).

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation $<$ est un ordre strict associé à la relation d'ordre usuel.
2. Pour tout ensemble E, la relation $\subsetneq$ est une relation d'ordre strict associée à la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$.

La démonstration du **théorème 13** est immédiate.

Théorème 13

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

La relation réciproque de la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre dans E.

Remarques

1. On note $\succcurlyeq$ au lieu de $\preccurlyeq^{-1}$ pour désigner la relation réciproque de $\preccurlyeq$.
2. Si la relation $\preccurlyeq$ est total, alors il en est de même pour la relation réciproque.
3. Si la relation $\preccurlyeq$ est partielle, alors il en est de même pour la relation réciproque.

Les justifications sont immédiates.

La démonstration du **théorème 14** est immédiate.

Théorème 14

Soient $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E.

La relation induite par $\preccurlyeq$ dans A est une relation d'ordre.

Remarque

1. La relation induite vue précédemment porte le nom d'**ordre induit**.
2. Si la relation $\preccurlyeq$ est total, alors il en est de même pour n'importe quel ordre induit définit dans un sous-ensemble.
3. Attention, si la relation $\preccurlyeq$ est partielle, la relation induite dans un sous-ensemble ne l'est pas nécessairement.

Il suffit de considérer un ordre induit d'une relation d'ordre partiel dans un singleton.

B Eléments remarquables d'un ensemble ordonné

Définition 21

Soient $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E.

Dire que l'ensemble A est **majoré** dans E signifie que :

$$\exists a\in E, \forall x\in A, x\preccurlyeq a.$$

Attention à l'ordre des quantificateurs.

Remarques

1. Un élément a de E qui vérifie : $\forall x\in A, x\preccurlyeq a$, est appelé **majorant**.
2. Si A est vide, alors tout élément de E est un majorant de A. Dans ce cas, il est nécessaire que E ne soit pas vide.
3. On note $\mathrm{Maj}_E(A)$ ou $\mathrm{Maj}(A)$ (lorsqu'aucune confusion est à craindre) l'ensemble des majorants de l'ensemble A.

Par exemple, $\mathrm{Maj}_{\mathbb{R}}([0,1[) = [1,+\infty[$.

Donc : $\mathrm{Maj}(A)=\{y\in E, \forall x\in A, x\preccurlyeq y\}$.

Exemples

1. Dans $(\mathbb{R},\leqslant)$, le sous-ensemble $[0,1[$ est majoré par 1 et par 2.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas majoré (retournez la définition dans la négation).

Il n'y a donc pas nécessairement unicité du majorant quand il existe.

Définition 22

Soient $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et B un sous-ensemble de E.

Dire que l'ensemble B est **minoré** dans E signifie que :

$$\exists b\in E, \forall x\in B, b\preccurlyeq x.$$

Le cours du chapitre 2

Remarques

1. Un élément b de E qui vérifie : $\forall x \in B, b \preccurlyeq x$, est appelé **minorant**.
2. Si B est vide, alors tout élément de E est un minorant de B. Dans ce cas, il est nécessaire que E ne soit pas vide.
3. On note $\mathrm{Min}_E(B)$ ou $\mathrm{Min}(B)$ (lorsqu'aucune confusion est à craindre) l'ensemble des minorants de l'ensemble B.

Par exemple, $\mathrm{Min}_{\mathbb{R}}([0,1[) =]-\infty, 0]$.

Donc : $\mathrm{Min}(B) = \{y \in E, \forall x \in B, y \preccurlyeq x\}$.

Exemple

Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, le sous-ensemble $[0,1[$ est minoré par -5 .

Définition 23

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A (resp. a) un sous-ensemble de E (resp. un élément de E).

Dire que a est un **maximum** de A dans E signifie que :

$$\begin{cases} a \in A \\ \forall x \in A, x \preccurlyeq a \end{cases}.$$

Autrement dit, un maximum d'un sous-ensemble (s'il existe) est un majorant appartenant à ce sous-ensemble.

Exemple

Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, le sous-ensemble $[0,1[$ n'admet pas de maximum mais la partie $[0,1]$ admet 1 comme maximum.

Définition 24

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et B (resp. b) un sous-ensemble de E (resp. un élément de E).

Dire que b est un **minimum** de B dans E signifie que :

$$\begin{cases} b \in B \\ \forall x \in B, b \preccurlyeq x \end{cases}.$$

Exemple

Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, le sous-ensemble $[0,1[$ admet 0 comme minimum.

Le théorème suivant est très prévisible :

Théorème 15 **Unicité du maximum lorsqu'il existe**

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E.

Si A admet un maximum, alors celui-ci est unique.

Le **théorème 15** reste encore valable si on remplace « maximum » par « minimum ».

Preuve

Supposons que la partie A de E admette deux éléments a et b qui sont des maximums.
Puisque a est en particulier un majorant de A, on a $b \preccurlyeq a$.
De même, b est aussi en particulier un majorant de A, donc $a \preccurlyeq b$.
Par antisymétrie de la relation $\preccurlyeq$, il vient que $a = b$. □

La preuve est très simple est instructive : on choisit arbitrairement deux éléments afin de montrer qu'ils sont égaux. C'est une astuce à connaître quand on veut montrer l'unicité d'un objet en mathématiques.

Remarque

Si la partie A de E admet un maximum (resp. un minimum), celui-ci est noté (conséquence de l'unicité) $\mathrm{Max}(A)$ (resp. $\mathrm{Min}(A)$).

Attention, la notion $\mathrm{Min}(A)$ est aussi utilisée pour désigner l'ensemble des minorants. En pratique ces notations sont peu utilisées et il est préférable de faire une phrase pour désigner un éventuel maximum ou minimum.

Définition 25

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A (resp. a) un sous-ensemble de E (resp. un élément de E).

Dire que a est un élément **maximal** de A dans E signifie que :

$$\forall x \in A, a \preccurlyeq x \Rightarrow x = a\,.$$

Un élément maximal est un élément tel qu'il n'existe pas d'autre élément qui lui soit strictement supérieur.
Autrement dit, deux situations se présentent pour un tel élément s'il rencontre un élément de E :
- soit ils sont comparables, et à ce moment-là, c'est lui le plus grand ;
- soit ils ne sont pas comparables.
Comme vous le constatez, c'est dans les relations d'ordre partiels que cette notion est pertinente.

Exemple

Considérons le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ de $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité.

Cherchons un élément maximal.

L'entier 9 en est un. En effet, on a $1\,|\,9$, $3\,|\,9$ et $9\,|\,9$. Il n'y a pas d'autre comparaison possible. Il vient donc que 9 est bien un élément maximal.

De même, 4 et 5 sont maximaux.

Il n'y a donc pas unicité.

Remarques

1. Comme on vient de le voir, contrairement au maximum, il se peut qu'il y ait plusieurs éléments maximaux.
2. Il est clair que l'existence d'un élément maximum entraîne celui d'un élément maximal (le même).
3. Attention, il est possible qu'il existe des éléments maximaux sans qu'il y ait de maximum (exemple précédent).
4. Le lecteur montrera que dans un ensemble totalement ordonné, un élément maximal quand il existe est aussi un maximum.

En clair, le maximum quand il existe est aussi un maximal (et donc le seul par unicité).

Définition 26

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et B (resp. b) un sous-ensemble de E (resp. un élément de E).

Dire que b est un élément **minimal** de B dans E signifie que :

$$\forall x \in B, x \preccurlyeq b \Rightarrow x = b\,.$$

Un élément minimal est un élément tel qu'il n'existe pas d'autre élément qui lui soit strictement inférieur.

Exemple

Considérons l'ensemble E définit par l'égalité $E = \{1, 2, 3\}$.

On a $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$.

Vérifions que le singleton $\{1\}$ est bien un élément minimal de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ pour la relation d'inclusion.

Les éléments comparables à $\{1\}$ sont : $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et E. C'est le plus petit de ces éléments au sens de l'inclusion.

C'est donc bien un élément minimal.

Comme on peut le deviner, les singletons $\{2\}$ et $\{3\}$ sont aussi des éléments minimaux.

Remarques

1. Comme on vient de le voir, contrairement au minimum, il se peut qu'il y ait plusieurs éléments minimaux.
2. Attention, il est possible qu'il existe des éléments minimaux sans qu'il y ait de minimum (exemple précédent).
3. On peut utiliser un **diagramme de Hasse** (du mathématicien allemand **Helmut Hasse** (1898-1979)) pour visualiser au mieux les éléments remarquables d'un ensemble ordonné.

Dans un diagramme de Hasse :

Les éléments ordonnés sont représentés par des points.

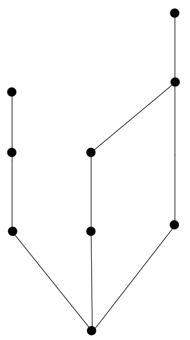
La relation entre deux éléments est représentée par un segment entre deux points.

Si un élément x est inférieur à un autre élément y, alors le point représentant x est placé plus bas que celui pour y.

Ainsi, les segments n'ont pas besoin d'être fléchés.

Afin d'éviter de surcharger le diagramme, les relations réflexives et transitives ne sont pas représentées.

Enfin, on veille autant que possible à ne pas croiser les segments.



Sur le diagramme ci-dessus, on lit rapidement que les deux points situés au plus haut sont des éléments maximaux et le point situé au plus bas est le minimum.

Nous terminons ce chapitre par l'étude de deux éléments remarquables dans un ensemble ordonné qui sera repris plus en détail dans le **chapitre 1** d'analyse.

La **définition 27** mérite une attention particulière.

Définition 27

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble majoré de E.

S'il existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E est appelé la **borne supérieure**.

Remarques

1. En cas d'existence, la borne supérieure de A dans E est notée $\mathrm{Sup}_E(A)$ ou $\mathrm{Sup}(A)$ s'il n'y a pas de risque de confusion.
2. En cas d'existence, $\mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Min}(\mathrm{Maj}(A))$ (c'est moche !).
3. Si la partie A admet un maximum, alors il est clair que cette partie admet une borne supérieure qui est ce maximum.
4. Si l'ensemble A est composé de deux éléments (par exemple $A = \{a, b\}$) et admet une borne supérieure, on préfère noter $\mathrm{Sup}(x, y)$ au lieu de $\mathrm{Sup}(\{x, y\})$ la borne supérieure. On généralise la notation quand A est composé de plus de deux éléments.
5. Si A est vide il y a deux possibilités :

- ou bien E admet un minimum, dans ce cas la borne supérieure de A désignera ce minimum ;
- ou bien E n'admet pas de minimum, dans ce cas on conviendra que la borne supérieure n'existe pas sauf dans le cas particulier où l'ensemble ordonné est $\mathbb{R}$ avec la relation d'ordre usuelle et on posera alors $\mathrm{Sup}(\varnothing) = -\infty$.

On rappelle que l'ensemble vide est par définition majorée par tous les éléments.

Cette convention sera justifiée en analyse (**Analyse chapitre 1**).

6. Exprimons le fait qu'un élément M soit la borne supérieure de A dans E en s'autorisant que le langage formel.

- M est déjà un majorant : $\forall x \in A, x \preccurlyeq M$.
- M est le plus petit des majorants : $\forall x \in E, (\forall a \in A, a \preccurlyeq x) \Rightarrow M \preccurlyeq x$.

L'assertion dit qu'en se donnant un majorant de A, il est nécessairement supérieur à M.

Le cours du chapitre 2

Exemples

1. Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, on a $\mathrm{Maj}([0,1[) = [1,+\infty[$. La partie $[1,+\infty[$ admet 1 comme minimum qui constitue donc la borne supérieure de la partie $[0,1[$.

Etant un majorant, la borne supérieure n'appartient pas nécessairement à la partie considérée.

2. $(\mathbb{R}, \leqslant)$, la partie $[1,+\infty[$ n'admet pas de borne supérieure puisqu'elle n'est pas majorée.
3. Soit E un ensemble.

Le lecteur pourra facilement établir que :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \mathrm{Sup}(X,Y) = X \cup Y \,.$$

Définition 28

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et B un sous-ensemble minoré de E.

S'il existe, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de B dans E est appelé la **borne inférieure**.

Remarques

1. En cas d'existence, la borne inférieure de B dans E est notée $\mathrm{Inf}_E(A)$ ou $\mathrm{Inf}(A)$ s'il n'y a pas de risque de confusion.
2. En cas d'existence, $\mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Max}(\mathrm{Min}(A))$ (c'est moche !).
3. Si la partie B admet un minimum, alors il est clair que cette partie admet une borne inférieure qui est ce minimum.
4. Si l'ensemble B est composé de deux éléments (par exemple $B = \{a,b\}$) et admet une borne inférieure, on préfère noter $\mathrm{Inf}(x,y)$ au lieu de $\mathrm{Inf}(\{x,y\})$ la borne inférieure. On généralise la notation quand B est composé de plus de deux éléments.
5. Si B est vide il y a deux possibilités :

On rappelle que l'ensemble vide est par définition minoré par tous les éléments.

- ou bien E admet un maximum, dans ce cas la borne inférieure de B désignera ce maximum ;
- ou bien E n'admet pas de maximum, dans ce cas on conviendra que la borne inférieure n'existe pas sauf dans le cas particulier où l'ensemble ordonné est $\mathbb{R}$ avec la relation d'ordre usuelle et on posera alors $\mathrm{Inf}(\varnothing) = +\infty$.

Cette convention sera justifiée en analyse (**Analyse chapitre 1**).

6. Exprimons le fait qu'un élément m soit la borne inférieure de B dans E en s'autorisant que le langage formel.
- m est déjà un minorant : $\forall x \in B, m \preccurlyeq x$.
- m est le plus grand des minorants : $\forall x \in E, (\forall b \in B, x \preccurlyeq b) \Rightarrow x \preccurlyeq m$.

L'assertion dit qu'en se donnant un minorant de B, il est nécessairement inférieur à m.

Exemples

1. Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, on a $\mathrm{Min}([0,1[) =]-\infty, 0]$. La partie $]-\infty,0]$ admet 0 comme maximum qui constitue donc la borne inférieure de la partie $[0,1[$.
2. Soit E un ensemble.

Le lecteur pourra facilement établir que :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \mathrm{Inf}(X,Y) = X \cap Y \,.$$

Théorème 16

Remarquez que A est non vide.

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble non vide de E.

Si A admet une borne inférieure et une borne supérieure dans E, alors :

$$\mathrm{Inf}(A) \preccurlyeq \mathrm{Sup}(A) \,.$$

Preuve

Par définition, $\mathrm{Inf}(A)$ est un minorant de A, donc : $\forall x \in A, \mathrm{Inf}(A) \preccurlyeq x$.

Par définition, $\mathrm{Sup}(A)$ est un majorant de A, donc : $\forall x \in A, x \preccurlyeq \mathrm{Sup}(A)$.

Par transitivité de la relation $\preccurlyeq$, il vient que $\mathrm{Inf}(A) \preccurlyeq \mathrm{Sup}(A)$. □

Théorème 17

Remarquez que les ensembles A et B ne sont pas vides.

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, A et B deux sous-ensembles non vides de E tel que $A \subset B$.

Si A et B admettent des bornes supérieures dans E, alors :

$$\mathrm{Sup}(A) \preccurlyeq \mathrm{Sup}(B) \,.$$

Preuve

$\mathrm{Sup}(B)$ est un majorant de B et donc de A puisque A est un sous-ensemble de B.

$\mathrm{Sup}(A)$ est un majorant de A, mais c'est le plus petit.

Il vient donc que $\mathrm{Sup}(A) \preccurlyeq \mathrm{Sup}(B)$. □

Attention à l'ordre des bornes inférieures.

Théorème 18

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, A et B deux sous-ensembles non vides de E tel que $A \subset B$.

Si A et B admettent des bornes inférieures dans E, alors :

$$\mathrm{Inf}(B) \preccurlyeq \mathrm{Inf}(A).$$

Preuve

$\mathrm{Inf}(B)$ est un minorant de B et donc de A puisque A est un sous-ensemble de B.

$\mathrm{Inf}(A)$ est un minorant de A, mais c'est le plus grand.

Il vient donc que $\mathrm{Inf}(B) \preccurlyeq \mathrm{Inf}(A)$. □

Les exercices du chapitre 2

1 Reconnaître un ensemble

Soient a et b des objets distincts et E l'ensemble défini par l'égalité $E = \{a, b\}$.

Dire à quels ensembles appartiennent les ensembles suivants.

1) (a, b) 2) $\{a\}$ 3) $(a, \{b\})$ 4) $(\{a\}, \{b\})$ 5) $\{\{a\}, \{b\}\}$
6) (a, E).

2 Déterminer un produit cartésien

On considère les ensembles E, F et G définie par les égalités :

$$E = \{1, 5\}, \quad F = \{2, 3\} \text{ et } G = \{1, 4\}.$$

Déterminer en extension les ensembles suivants :

1) $E \times F$ 2) $E \times \{1\}$ 3) $E \times \varnothing$ 4) $F \times (E \cap G)$
5) $(F \times E) \cap G$ 6) $G \times (E \cup G)$ 7) $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$
8) $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$ 9) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E \times \varnothing)) \times \mathcal{P}(\{1\})$.

3 Complémentaire d'un produit cartésien

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Exprimer dans l'ensemble $E \times E$, l'ensemble $\overline{A \times B}$ en fonction des sous-ensembles de E.

4 Propriété du produit cartésien

Soient E, F, G et H des ensembles non vides.

Montrer que :

$$E \times F = G \times H \Leftrightarrow (E = G \text{ et } F = H).$$

5 ★ Propriété du produit cartésien

Soient A un sous-ensemble d'un ensemble E et B un sous-ensemble d'un ensemble F.

1) A l'aide d'un exemple, démontrer qu'on n'a pas, en général :

$$(E \times F) - (A \times B) = (E - A) \times (F - B).$$

2) Faire un dessin représentant $(E \times F) - (A \times B)$ pour $E = F = \mathbb{R}$ et $A = [1, 3]$, $B = [1, 2]$.

3) Montrer que :

$$(E \times F) - (A \times B) = ((E - A) \times F) \cup (E \times (F - B)),$$

et proposer une autre formule dans laquelle la réunion est disjointe.

6 ★★ Propriété du produit cartésien

Soient E, F, G et H des ensembles.

Montrer que la réunion $(E \times F) \cup (G \times H)$ est égale à :

$$[(E \cup G) \times (F \cup H)] - [(E - G) \times (H - F) \cup (G - E) \times (F - H)].$$

7 ★ Ordre strict

Montrer qu'une relation définie sur un ensemble est un ordre strict si et seulement si elle est antiréflexive et transitive.

8 Relations remarquables

Soit A la partie de $\mathbb{N}$ définie par l'égalité :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Sur A, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par l'égalité :

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,4), (4,3), (4,4)\}.$$

Cette relation est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

9 Relation d'équivalence

Soit E un ensemble.

On définit la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), A \,\mathcal{R}\, B \Leftrightarrow (A = B) \vee (A = \overline{B}).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

10 Relations remarquables

Soit E l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2.

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans E par :

$$\forall (p, q) \in E^2, p \,\mathcal{R}\, q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in E.$$

Cette relation est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

11 ★ Relations remarquables

Soit E un ensemble.

A toute relation $\mathcal{R}$ définie sur E, on associe les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ définies sur E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \,\mathcal{S}\, y \Leftrightarrow (x \,\mathcal{R}\, y) \wedge (y \,\mathcal{R}\, x) \\ x \,\mathcal{T}\, y \Leftrightarrow (x \,\mathcal{R}\, y) \wedge (y \,\not{\mathcal{R}}\, x) \end{cases}.$$

1) Montrer que la relation $\mathcal{S}$ est symétrique et que la relation $\mathcal{T}$ est antisymétrique.

2) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow (x \,\mathcal{S}\, y) \vee (x \,\mathcal{T}\, y).$$

3) Montrer que si la relation $\mathcal{R}$ est transitive alors les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ le sont aussi.

12 Relations remarquables

Après avoir analysé les différentes définitions d'une relation binaire réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive, Théo affirme qu'une relation à la fois symétrique et transitive est toujours réflexive.

Voici sa démonstration :

« Soient x et y deux éléments d'un même ensemble E où l'on définit une relation binaire symétrique et transitive.

Comme la relation est symétrique, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Et puisque qu'on a à la fois $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, par transitivité de la relation $\mathcal{R}$ on a $x\mathcal{R}x$ et la relation est transitive ! »

Qu'en pensez-vous ?

13 Relation circulaire

On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est **circulaire** quand :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \Rightarrow z \,\mathcal{R}\, x.$$

1) Montrer qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et circulaire.

2) Donnez un exemple de relation circulaire qui n'est pas une relation d'équivalence.

14 ★ Classe d'équivalence

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E.

On définit une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Expliciter $\mathrm{Cl}(\varnothing)$, $\mathrm{Cl}(E)$, $\mathrm{Cl}(A)$ et $\mathrm{Cl}(\overline{A})$.

Soit X une partie de E.

3) Montrer que si $B = A \cap X$, alors B est l'unique élément de $\mathrm{Cl}(X)$ contenu dans A.

15 ★ Relation d'équivalence

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (x, y) \,\mathcal{R}\, (z, t) \Leftrightarrow xy = zt.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Quelles sont les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$?

Les exercices du chapitre 2

16 Relation d'ordre

Soient $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\varnothing\}$ par :

$$\forall (X,Y)\in(\mathcal{P}(E)\setminus\{\varnothing\})^2, X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in X, \forall y\in Y, x\preccurlyeq y\\ \text{ou}\\ X=Y\end{cases}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

17 Relation d'équivalence

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x,y),(z,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2, (x,y)\,\mathcal{R}\,(z,t) \Leftrightarrow \begin{cases}xy=zt\\ xz\geqslant 0\end{cases}.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

18 Relation d'équivalence

Soit $\mathcal{P}$ un repère du plan d'origine O.
On définit dans $\mathcal{P}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$M\,\mathcal{R}\,N \Leftrightarrow O, M, N \text{ sont alignés}.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence.
2) Que se passerait-il si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P}\setminus\{O\}$?

19 Relation d'équivalence

Sur l'ensemble des nombres réels, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow xe^y=ye^x.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Quelle est la classe d'équivalence de 0 modulo $\mathcal{R}$?

20 ★ Relations remarquables

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations définies sur un ensemble E.
1) Montrer que si les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors la relation $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ l'est aussi.
2) a) Montrer que si les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques et si $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ est symétrique.
b) Donnez un exemple où les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques et où $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ ne l'est pas.
3) a) Montrer que si la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique et transitive, alors $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}$ est antisymétrique.
b) Donnez un exemple où les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques et où $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ ne l'est pas.
4) a) Montrer que si la relation $\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}$ l'est aussi.
b) Donnez un exemple où les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives et où $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ ne l'est pas.
5) Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (resp. relation d'ordre), alors $\mathcal{R}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}$.

21 ★ Relation d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.
On définit dans E une relation $\mathcal{S}$ par :

$$\forall (x,y)\in E^2, x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*, \exists (x_0,x_1,\dots,x_n)\in E^{n+1} \text{ tels que } \begin{cases}x_0=x \text{ et } x_n=y\\ \forall i\in\{0,\dots,n-1\}, x_i\,\mathcal{R}\,x_{i+1}\end{cases}.$$

1) Montrer que la relation $\mathcal{S}$ est transitive.
2) Montrer que si la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique, alors $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

22 Relation d'équivalence

Sur l'ensemble des nombres réels, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer les classes d'équivalence des nombres 0, 1, 2 et $\frac{1}{2}$.

23 ★ Relation d'équivalence

Sur l'ensemble des nombres réels, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow (x^3+2)(y^2+1)=(y^3+2)(x^2+1).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, préciser le nombre d'éléments de $\mathrm{Cl}(x)$.

24 ★★ Relation d'équivalence

On définit sur un ensemble E deux relations d'équivalence $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.
Montrer que la relation composée $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$.

25 ★ Relation d'équivalence

Soit E un ensemble fini.
On définit une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall (A,B)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E), A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow \mathrm{card}(A\Delta B) \text{ est pair}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

26 ★ Relation d'équivalence

Soit E un ensemble.
1) Montrer que, pour toutes parties A, B, C et D de E :

$$\begin{cases}B-C\subset A\\ C-D\subset A\end{cases} \Rightarrow B-D\subset A.$$

Soit $A\in\mathcal{P}(E)$.
2) Montrer que la relation $\mathcal{R}_A$ définie dans $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall (B,C)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E), B\,\mathcal{R}_A\,C \Leftrightarrow B\Delta C\subset A,$$

est une relation d'équivalence.
3) Pour tout B de $\mathcal{P}(E)$, préciser la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

27 ★ Ensemble ordonné

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E admet un plus petit élément et un plus grand élément.
Montrer que l'ensemble E est fini.

28 Relation d'ordre

Soit E un ensemble sur lequel existent deux relations d'ordre total $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ telles que :

$$\forall (x,y)\in E^2, x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,y.$$

Montrer que :

$$\forall (x,y)\in E^2, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{S}\,y.$$

29 ★ Borne supérieure

Donner des exemples d'ensembles ordonnées $(E,\preccurlyeq)$ et de parties A, B de E telles que $A\subset B$ et telles que :
1) A admet une borne supérieure dans E et B n'admet pas de borne supérieure dans E.
2) A n'admet pas de borne supérieure dans E et B admet une borne supérieure dans E.
3) A et B admettent des bornes supérieures dans E et :

$$\mathrm{Sup}(A)\neq\mathrm{Sup}(B).$$

Les exercices du chapitre 2

30 Relation d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble E.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \\ \Delta_E \subset \mathcal{R} \end{cases},$$

où Δ_E désigne l'ensemble $\{(x,x), x \in E\}$ (appelé diagonale de E).

31 Relation d'ordre

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

Une partie X de E est dire **libre** quand :

$$\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow \neg((x \preccurlyeq y) \vee (y \preccurlyeq x)).$$

On note $\mathrm{L}(E)$ l'ensemble des parties libres de E et on définit une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathrm{L}(E)$ par :

$$\forall (X,Y) \in \mathrm{L}(E) \times \mathrm{L}(E), X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow (\forall x \in X, \exists y \in Y, x \preccurlyeq y).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) Montrer que :

$$\forall (X,Y) \in (L(E))^2, X \subset Y \Rightarrow X \mathcal{R} Y.$$

32 Eléments remarquable d'un ensemble ordonné

Sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\preccurlyeq$ en posant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n.$$

1) Vérifier que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre partiel.

Soient A, B, C et D des ensembles définis par les égalités suivantes :

$$A = \{2,4,16\}, \quad B = \{2,3\}, \quad C = \{2,3,4\} \quad \text{et} \quad D = \{4,8\}.$$

2) Montrer que A possède un maximum et un minimum (à préciser).

3) Montrer que B ne possède ni de majorants, ni de minorants.

4) Montrer que 3 et 4 sont des éléments maximaux de C et que 2 et 3 sont des éléments minimaux de C.

5) Montrer que D possède une borne supérieure et une borne inférieure (à préciser).

33 Eléments remarquable d'un ensemble ordonné

Donnez, sans justification, s'ils existent, les majorants, minorants, maximum, minimum, borne supérieure et borne inférieure de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1) $A = [1, 10[$ 2) $B =]1, +\infty[$ 3) $C = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

34 Eléments remarquable d'un ensemble ordonné

Soit $\preccurlyeq$ la relation définie dans $\mathbb{Z}$ par :

- $\forall x \in \mathbb{Z}, x \preccurlyeq x$;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \leqslant y$;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}_-^* \times \mathbb{N}, x \preccurlyeq y$.

1) Vérifier que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

2) Montrer que la partie $\mathbb{Z}_-^*$ est formée d'éléments tous maximaux dans $\mathbb{Z}_-^*$.

3) Montrer que la partie $\mathbb{Z}_-^*$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{Z}$ qu'on déterminera.

35 Eléments remarquable d'un ensemble ordonné

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné admettant un plus grand élément et tel que toute partie non vide de E admette une borne inférieure.

Montrer que toute partie non vide de E admet une borne supérieure.

36 Eléments remarquable d'un ensemble ordonné

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, A et B deux parties de E.

On suppose que A et B ont chacun un plus grand élément.

1) Qu'en est-il de l'ensemble $A \cup B$ lorsque l'ordre est total ? lorsqu'il ne l'est pas ?

2) Qu'en est-il de l'ensemble $A \cap B$?

37 Borne supérieure

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, A et B deux parties de E.

On suppose que $\mathrm{Sup}(A)$, $\mathrm{Sup}(B)$ et $\mathrm{Sup}(\mathrm{Sup}(A), \mathrm{Sup}(B))$ existent.

Montrer que $\mathrm{Sup}(A \cup B)$ existe et le calculer.

38 Ensemble bien ordonné

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

On dit que $(E, \preccurlyeq)$ est **bien ordonné** ou que la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est de **bon ordre** quand toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1) Proposez, à l'aide de quantificateurs, une définition d'un ensemble dit bien ordonné.

2) Montrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

3) La réciproque est-elle vraie ?

39 Relation d'équivalence et relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive définie sur un ensemble E.

On définit sur E la relation $\mathcal{S}$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \mathcal{S} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases}.$$

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur E.

Sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{S}$, on définit la relation $\preccurlyeq$ par :

$$\forall (A,B) \in E/\mathcal{S} \times E/\mathcal{S}, A \preccurlyeq B \Leftrightarrow \exists (a,b) \in A \times B, a \mathcal{R} b.$$

2) Montrer que si $A \preccurlyeq B$, alors, pour tout $a' \in A$ et pour tout $b' \in B$, la relation $a' \mathcal{R} b'$ est vérifiée.

3) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $E/\mathcal{S}$.

40 Elément maximal

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné fini et non vide.

1) Montrer que E admet au moins un élément maximal.

2) Montrer que, pour tout x de E, il existe un élément maximal M de E tel que $x \preccurlyeq M$.

41 Relations remarquables

On définit dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$ noté A, deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définies par :

$$\forall (x,y) \in A^2, \begin{cases} x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \mid y \\ x \mathcal{S} y \Leftrightarrow \mathrm{PGCD}(x,y) = 1 \end{cases}.$$

Etudier les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

42 Relation d'équivalence

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'équivalence définies sur un même ensemble E.

1) Montrer que la relation notée $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x \mathcal{R} \cap \mathcal{S} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ x \mathcal{S} y \end{cases}.$$

est une relation d'équivalence sur E.

2) Montrer que :

$$\forall x \in E, \mathrm{Cl}_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}(x) = \mathrm{Cl}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathrm{Cl}_{\mathcal{S}}(x).$$

Les exercices du chapitre 2

43 **Relation d'équivalence**

Dans $\mathbb{R}_+^*$, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \ln(y) = y \ln(x) .$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{R}_+^* / \mathcal{R}$.

44 **Relation d'équivalence**

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - 2x = y^2 - 2y .$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x.

45 **Relation**

Dans l'ensemble $\{1, ..., 6\}$, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \{1, ..., 6\}^2, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mid x .$$

Ecrire en extension la relation $\mathcal{R}$.

46 **Relations remarquables**

Sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par l'égalité :

$$\mathcal{R} = \{(1,3),(3,4),(1,4),(2,1),(1,2),(2,2)\} .$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

47 ★★★ **Finesse d'une relation**

Soient E un ensemble et $\mathfrak{B}$ l'ensemble des relations binaires dans E.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux éléments de $\mathfrak{B}$.

Dire que la relation $\mathcal{S}$ est **plus fine** que la relation $\mathcal{R}$ signifie que :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x \mathcal{S} y \Rightarrow x \mathcal{R} y .$$

1) Montrer que la relation d'inclusion est un ordre dans $\mathfrak{B}$.

On note $\mathcal{R}'$ la relation binaire sur E définie par :

$$\forall (a,b) \in E \times E, a \mathcal{R}' b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_0, a_1, ..., a_{2n}) \in E^{2n+1} \text{ tels que}$$

$$\begin{cases} a_0 = a \text{ et } a_{2n} = b \\ \forall i \in \{0, ..., n-1\}, \begin{cases} (a_{2i} \mathcal{R} a_{2i+1}) \vee (a_{2i} = a_{2i+1}) \\ (a_{2i+2} \mathcal{R} a_{2i+1}) \vee (a_{2i+2} = a_{2i+1}) \end{cases} \end{cases} .$$

2) a) Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est plus fine que la relation $\mathcal{R}'$.

3) Montrer que si $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence telle que la relation $\mathcal{R}$ est plus fine que la relation $\mathcal{S}$, alors la relation $\mathcal{R}'$ est plus fine que la relation $\mathcal{S}$.

4) En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égales.

48 **Relation asymétrique**

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

Dire que la relation $\mathcal{R}$ est **asymétrique** signifie que :

$$\forall (x,y) \in E \times E, x \mathcal{R} y \Rightarrow \neg (y \mathcal{R} x) .$$

1) Donnez un exemple d'une relation asymétrique.

2) Une relation peut-elle être à la fois symétrique et asymétrique ?

3) Montrer qu'une relation est asymétrique si et seulement si elle est antiréflexive et antisymétrique.

Problèmes du chapitre 2

Le but de ces trois problèmes est d'étudier deux relations d'ordre remarquables : l'**ordre produit** et l'**ordre lexicographique** (ce dernier est utilisé pour classer les mots dans le dictionnaire).
Il est conseillé de traiter le **problème II** avant de traiter le **problème III**.

Problème I Ordre produit

Soient $(E,\preccurlyeq)$ et $(F,\preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés, $\mathcal{P}$ la relation définie dans $E\times F$ par :

$$\forall (x,y),(x',y')\in E\times F, (x,y)\,\mathcal{P}\,(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x\preccurlyeq x' \\ y\preccurlyeq y' \end{cases}.$$

1) Montrer que $\mathcal{P}$ est une relation d'ordre, appelé **ordre produit** des ordres E et F.

Dans toute la suite des questions, on munit $\mathbb{R}^2$ de l'ordre produit (que l'on notera abusivement $\leqslant$) déduit de l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$.

On prend le cas particulier où les ensembles E et F sont égaux à $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$.

2) La relation d'ordre $\leqslant$ est-elle totale dans $\mathbb{R}^2$?

3) Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, donner l'ensemble des majorants et des minorants de l'ensemble $\{(x,y)\}$.

4) La partie $(\mathbb{R}_-^*)^2$ de $\mathbb{R}^2$, admet-elle une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$? si oui, préciser laquelle.

Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par les égalités :

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leqslant 1\} \text{ et } B=\{(x,y),(x',y')\} \text{ où } (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2.$$

5) a) Quels sont les éléments maximaux de l'ensemble A ?
b) Montrer que l'ensemble A admet une borne supérieure à préciser.
c) Montrer que l'ensemble B admet une borne supérieure et une borne inférieure à préciser.

Problème II Ordre lexicographique

Soient $(E,\preccurlyeq)$ et $(F,\preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés, $\mathcal{L}$ la relation définie dans $E\times F$ par :

$$\forall (x,y),(x',y')\in E\times F, (x,y)\,\mathcal{L}\,(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x\prec x' \\ \text{ou} \\ (x=x')\wedge(y\preccurlyeq y') \end{cases}.$$

1) Montrer que $\mathcal{L}$ est une relation d'ordre, appelé ordre lexicographique des ordres E et F.
2) Montrer que si la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est totale dans E et F, alors la relation $\mathcal{L}$ est totale.

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}^2$ de l'ordre lexicographique (que l'on notera abusivement $\leqslant$) déduit de l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$).

3) a) Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, préciser l'ensemble des majorants du couple (x,y) dans $\mathbb{R}^2$.

b) Est-ce que la partie $\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$? si oui, préciser.

Problème III Ordre lexicographique et nombres complexes

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on définit une relation binaire $\preccurlyeq$ par :

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}, z\preccurlyeq z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z') \\ \text{ou} \\ (\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z'))\wedge(\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z')) \end{cases}.$$

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale dans $\mathbb{C}$.
2) Si l'on restreint cette relation à $\mathbb{R}$, qu'obtient-on ?
3) Comparer entre eux (via la relation $\preccurlyeq$) les nombres complexes :

$$\text{a) } 1+\mathrm{i} \quad \text{b) } 1-\mathrm{i} \quad \text{c) } -1+\mathrm{i}.$$

4) Déterminer l'ensemble K défini par l'égalité :

$$K=\{z\in\mathbb{C}, 0\preccurlyeq z\},$$

et montrer que si z appartient à K, il n'en est pas nécessairement de même pour z^2.
5) L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}, \forall t\in\mathbb{C}, z\preccurlyeq z' \Rightarrow z+t\preccurlyeq z'+t.$$