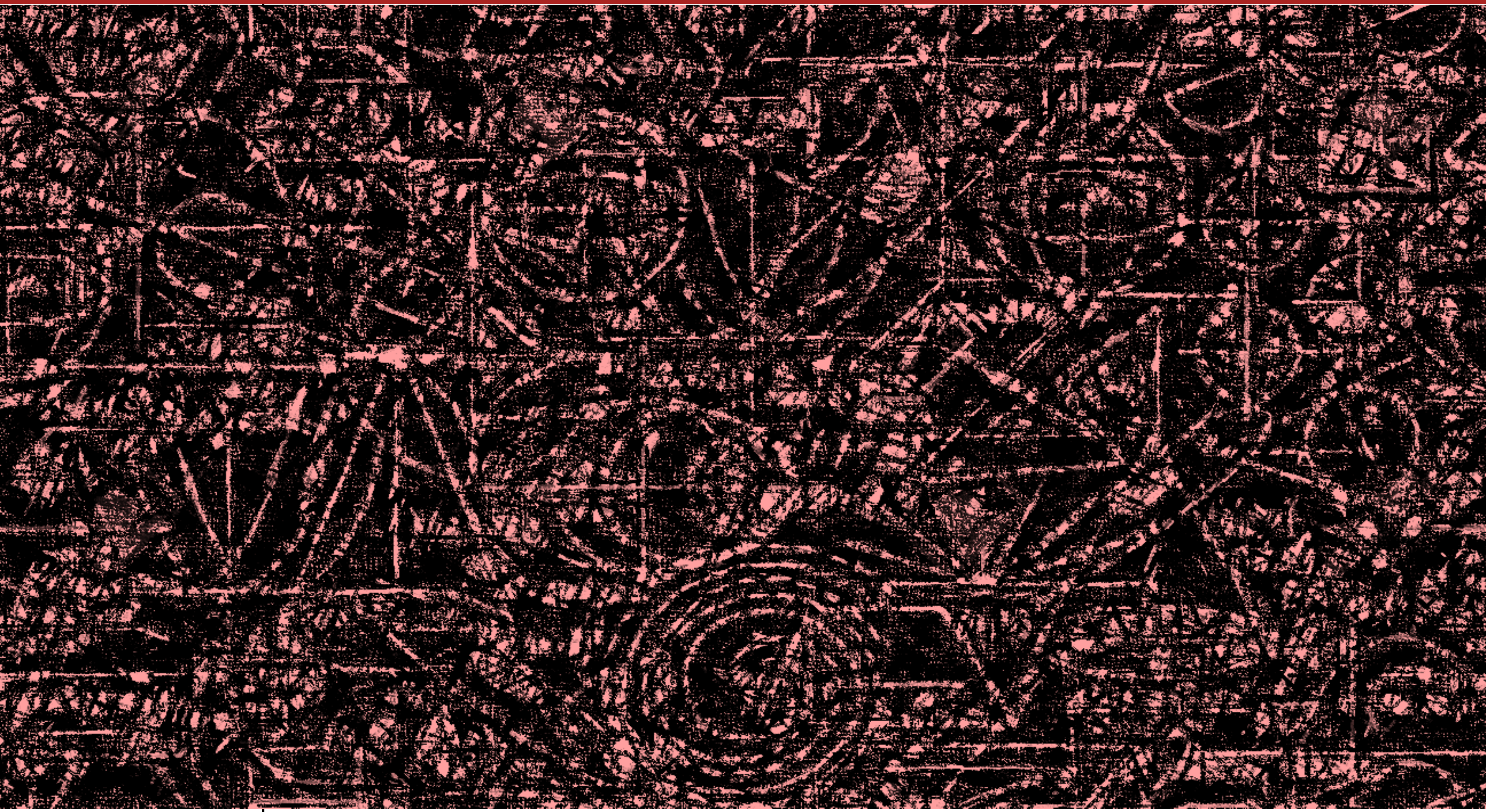
Axiomes d'ordre

2



Moritz **Pasch** (1843-1930) était un mathématicien allemand.

Introduction

Nous poursuivons notre axiomatisation de la géométrie avec les axiomes d'ordre. Alors que les axiomes d'incidence ne s'intéressaient qu'aux « contacts » entre les points, droites et plans, les axiomes d'ordre s'intéressent aux « positions » d'un point par rapport à une droite et un plan. Parmi ces axiomes, nous citerons l'**axiome de Pasch**.
Nous en profiterons pour définir de nouveaux objets comme le **segment** et la **demi-droite**.

Prérequis

- Axiome d'incidence (**chapitre 1**)
- Relations d'équivalence (**chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Présenter les axiomes d'ordre
- Définir le **segment**
- Présenter l'**axiome de Pasch** et étudier les conséquences
- Définir le **demi-plan**
- Définir la **demi-droite**
- Etudier les propriétés des demi-droites
- Définir le **demi-espace**

Le cours du chapitre 2

1 Axiomes d'ordre

A Une relation entre les points

En réalité, nous n'allons pas définir ces notions mais nous allons donner des axiomes pour les utiliser.

Que signifie « être entre deux points » et « ne pas être entre deux points » ?
On considère trois points A, B et C de l'espace.
Afin d'alléger les écritures, nous noterons $A * B * C$, pour signifier que le point B se situe entre les points A et C et nous noterons $\neg(A * B * C)$ pour signifier que le point B ne se situe pas entre les points A et C.

Axiome 1

Soient A, B et C trois points.
Si $A * B * C$, alors les points A, B et C sont deux à deux distincts, alignés et $C * B * A$.

En particulier, si le point B est entre les points A et C, alors il est entre les points C et A.

Axiome 2

Soient A, B et C trois points.
Si $A * B * C$, alors $\neg(B * A * C)$.

Remarque

Il suffit d'appliquer les deux premiers axiomes.

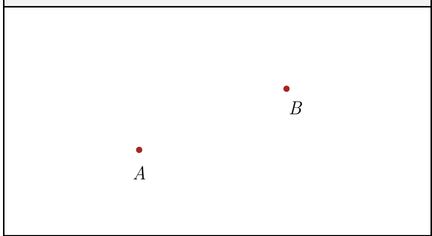
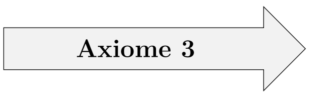
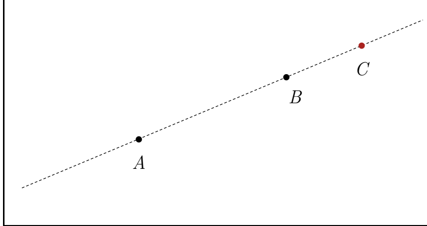
On déduit de l'**axiome 2** que si $A * B * C$, alors $\neg(A * C * B)$.

Axiome 3

Soient A et B deux points distincts.
Il existe un point C tel que $A * B * C$.

Remarque

Schématisons l'**axiome 3** :

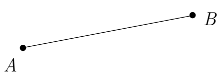
Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
		
A et B sont deux points distincts.		Il existe un point C de la droite (AB) tel que le point B est situé entre les points A et C.

Utilisons à présent ces axiomes d'ordre pour donner quelques définitions qui permettent de retrouver certains objets familiers de la géométrie plane.

Définition 1

Soient A et B deux points.
On appelle **segment (ouvert)** d'extrémités A et B, l'ensemble des points de l'espace qui sont situés entre A et B.

Remarques



1. Le segment d'extrémités A et B sera noté $]AB[$ et on prononcera simplement « segment AB ».
2. Par définition, on a :
$$]AB[= \{M \in \mathcal{E}, A * M * B\}.$$
3. En utilisant l'**axiome 1**, il est clair que $]AB[=]BA[$.
4. Si $A = B$, alors $]AB[= \{M \in \mathcal{P}, A * M * A\} = \varnothing$ (application de l'**axiome 1**) et on parlera de **segment nul**.

Il est clair que $[AB] = [BA]$, en effet : $[AB] = \{A, B\} \cup]AB[$ $= \{B, A\} \cup]BA[$ $= [BA]$.

5. On appelle **segment fermé** d'extrémités A et B l'ensemble $]AB[\cup \{A, B\}$, qui sera noté $[AB]$.
6. On notera $[AB[=]AB[\cup \{A\} = [AB] - \{B\}$ et $]AB] =]AB[\cup \{B\} = [AB] - \{A\}$.
7. On appelle **support** d'un segment (non nul) la droite passant par les deux extrémités du segment.
8. On dit qu'une droite **coupe** le segment $]AB[$ (non nul) lorsque la droite est sécante avec la droite (AB) et si leur point d'intersection appartient au segment $]AB[$. Par définition du segment, ce point d'intersection est nécessairement entre les points A et B.

Le cours du chapitre 2

B Axiome de Pasch

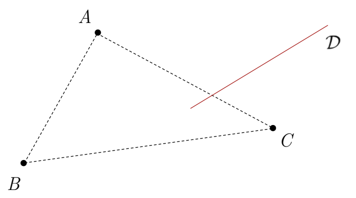
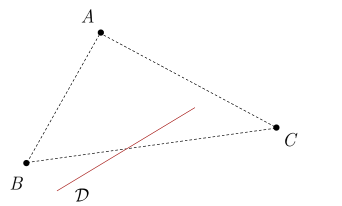
Voilà un axiome important :

Axiome 4 Axiome de Pasch

Soit $\mathcal{D}$ une droite non incidente à trois points A, B et C non alignés.
Si la droite $\mathcal{D}$ coupe le segment $]AB[$, alors $\mathcal{D}$ coupe le segment $]BC[$ ou le segment $]AC[$.

Les triangles sont étudiés dans le **chapitre ??**.

Remarque
Anticipons sur l'étude des **triangles**.
L'**axiome de Pasch** dit simplement que si une droite passe par un côté d'un triangle (hors sommets), alors elle en ressort nécessairement par un autre côté.
Aussi, schématisons cet axiome :

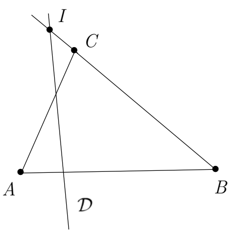
Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
	Axiome 4	
La droite $\mathcal{D}$ coupe le côté $[AC]$.		La droite finit par couper l'un des deux autres côtés du triangle (ici le côté $[BC]$).

Cet axiome va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

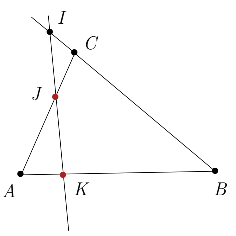
Le **théorème 1** est important.

Théorème 1

Soient A, B et C trois points non alignés, I un point tel que $I * C * B$ et $\mathcal{D}$ une droite passant par le point I.
Si la droite $\mathcal{D}$ coupe l'un des segments $]AC[$ ou $]AB[$, alors elle coupe l'autre.



Preuve
Supposons que la droite $\mathcal{D}$ coupe le segment $]AB[$ (on fait ici la démonstration que dans un cas, le cas où la droite $\mathcal{D}$ coupe le segment $]AC[$ se fait de la même manière).
Par hypothèse, le point C est entre les points I et B, donc I n'est pas entre les points C et B (**axiome 2**). Par conséquent, la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le segment $]BC[$.
De plus, la droite $\mathcal{D}$ n'est pas incidente aux points A, B et C car d'une part elle coupe le segment $]AB[$ et d'autre part, si elle était incidente à C, elle serait confondue avec la droite (IC) (application de l'**axiome 1** du chapitre précédent) en passant par B.
D'après l'**axiome de Pasch**, la droite $\mathcal{D}$ coupe nécessairement le segment $]AC[$. □

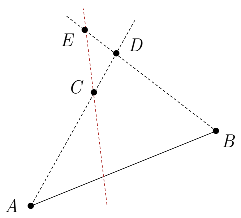


Remarque
Essayons d'aller plus loin dans la preuve précédente.
On prend les mêmes hypothèses, et on nomme J le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (AC), I celui des droites $\mathcal{D}$ et (AB). On va montrer que J est nécessairement entre les points I et K.
Evidemment, cela se « voit » bien sur la figure ci-contre. Mais comme vous le savez, un dessin ne doit rien valider.
C'est très facile : il suffit d'appliquer le théorème précédent aux points B, I, K et à la droite (AC).

Autrement dit, entre deux points, il en existe un troisième.

Théorème 2

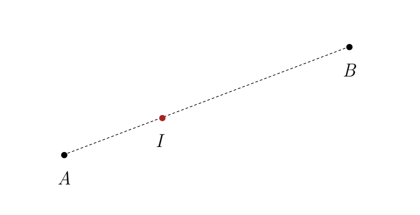
Soient A et B deux points distincts.
Il existe un point I de l'espace tel que $A * I * B$.



Preuve
Considérons un point C n'appartenant pas à la droite (AB) (application du **théorème 2** du **chapitre 1**).
D'après l'**axiome 3**, il existe un point D tel que $A * C * D$ et il existe un point E tel que $B * D * E$.
On applique maintenant le théorème précédent aux points A, B et D : la droite (EC) coupe bien le segment $]AD[$ et donc coupe le segment $]AB[$. □

Remarques

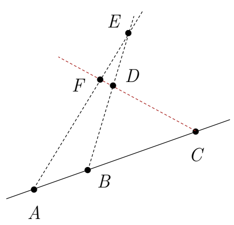
1. Même si cela est un peu tôt pour le dire, il résulte du **théorème 2** qu'un segment contient une infinité de points.
2. Schématisons le **théorème 2** :

Données initiales	Théorème utilisé	Conclusion
	Théorème 2	
On considère deux points distincts A et B.		Il existe un point situé entre les deux points A et B.

Théorème 3

Si trois points distincts sont alignés, alors un seul d'entre eux est entre les deux autres.

Attention, la preuve demande un effort de concentration.



Preuve

Soient A, B et C trois distincts et alignés.
Supposons d'une part que le point A n'est pas entre les points B et C et d'autre part que le point C n'est pas entre les points A et B.
Montrons que nécessairement le point B est entre les points A et C.
Considérons un point D n'appartenant pas à la droite (AC).
Considérons aussi un point E tel que D se situe entre les points B et E (**axiome 3**).
On applique une première fois le **théorème 1** aux points A, B et E : la droite (CD) coupe le segment $]AE[$ en un point F. De plus (remarque du **théorème 1**) l'intersection des droites (CD) et (BE) étant D, ce dernier est entre les points C et F.
On applique alors une seconde fois le **théorème 1** aux points A, C et F : la droite (ED) coupe le segment $]AC[$ au point B.
Il vient alors que le point B est entre les points A et C. □

Remarque

Pour des points A, B et C deux à deux distincts et alignés, on sait d'après le théorème précédent que :

$$A * B * C \quad \text{ou} \quad B * A * C \quad \text{ou} \quad A * C * B\,.$$

L'**axiome 2** nous sert pour la première fois ici.

Il est de plus pas possible d'être dans deux (ou dans les trois) situations à la fois à cause de l'**axiome 2**.

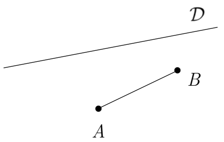
2 Demi-plan, demi-droite et demi-espace

A Demi-plan

Pour définir la notion de **demi-plan**, nous avons besoin de la définition suivante :

Attention, les **définitions 2** et **3** n'ont de sens que dans un plan.

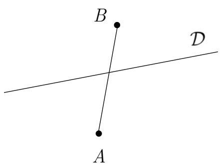
Ci-dessous, les points A et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$:



Définition 2

Soient A et B deux points d'un plan non incidents à une droite $\mathcal{D}$ du même plan.
Dire que les points A et B **sont du même côté de $\mathcal{D}$** signifie qu'ils sont confondus ou que le segment $]AB[$ ne contient aucun point incident à $\mathcal{D}$.

Ci-dessous, les points A et B sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$:



Définition 3

Soient A et B deux points d'un plan non incidents à une droite $\mathcal{D}$ du même plan.
Dire que les points A et B **sont de part et d'autre de $\mathcal{D}$** signifie qu'ils sont distincts, et qu'il existe un point du segment $]AB[$ incident à $\mathcal{D}$.

Remarques

1. Dans la **définition 2**, on abrège « A est du même côté que B par rapport à la droite $\mathcal{D}$ » par « A et B sont du même côté de $\mathcal{D}$ » en anticipant sur la symétrie de cette relation.
2. La **définition 3** n'est que la négation de la **définition 2** (exercice immédiat de logique).

Ainsi, pour deux points A et B distincts d'une droite $\mathcal{D}$, ils sont soit du même côté de la droite $\mathcal{D}$, soit de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$.

Le cours du chapitre 2

Les relations d'équivalence ont été étudiées dans le **chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1.

Théorème 4

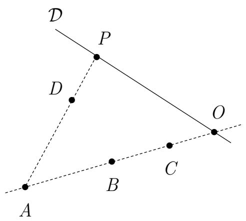
Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan.
La relation « être du même côté de la droite $\mathcal{D}$ » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des points du plan privé de la droite $\mathcal{D}$.

Preuve

La réflexivité et la symétrie sont immédiate.
On va montrer la transitivité qui est plus délicate.
Soient A, B et C trois points distincts d'un plan non incidents à une droite $\mathcal{D}$ du même plan.
On suppose que d'une part les points A et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$ et d'autre part que les points B et C sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$.
Montrons alors que A et C sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$.
Supposons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Raisonnement par l'absurde.

Admettons en plus que les points A et C sont de part de d'autre de la droite $\mathcal{D}$.
D'après l'**axiome de Pasch**, puisque la droite $\mathcal{D}$ coupe le segment $]AC[$, elle coupe ou bien le segment $]AB[$, ou bien le segment $]BC[$.
Mais dans ce cas, ou bien les points A et B sont de part de d'autre de la droite $\mathcal{D}$, ou bien ce sont les points B et C qui sont de part de d'autre de la droite $\mathcal{D}$, contradiction.
Donc les points A et C sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$.



Supposons maintenant que les points A, B et C sont alignés.
Si la droite les contenant est parallèle à la droite $\mathcal{D}$, c'est gagné : la droite les contenant est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et donc les points A et C sont par définition du même côté de la droite $\mathcal{D}$.
Sinon, notons O le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et de la droite contenant les trois points A, B et C.
Soit P un point de la droite $\mathcal{D}$ distinct du point O et D un point du segment $]AP[$.
La droite $\mathcal{D}$ ne coupe ni le segment $]AB[$ (puisque A et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$ par hypothèse), ni le segment $]AD[$ (puisque la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le segment $]AP[$).

Il s'agit même de la contraposée.

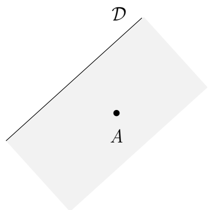
D'après l'**axiome de Pasch**, la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le segment $]BD[$.
De nouveau, comme la droite $\mathcal{D}$ ne coupe ni le segment $]BD[$, ni le segment $]BC[$, d'après l'**axiome de Pasch**, la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le segment $]CD[$.
De nouveau encore, comme la droite $\mathcal{D}$ ne coupe ni le segment $]CD[$, ni le segment $]AD[$, d'après l'**axiome de Pasch**, la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas le segment $]AC[$.

On a ainsi établi la transitivité.

Il vient alors, par définition, que les points A et C sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$. □

Remarques

Soient A et B deux points non incidents à une droite $\mathcal{D}$ tous contenus dans un plan Π.



1. Une classe d'équivalence de la relation « être du même côté de la droite $\mathcal{D}$ » est appelée **demi-plan** (**ouvert**).
2. On note Π_A le demi-plan contenant A.
3. Pour tout demi-plan, la droite $\mathcal{D}$ est appelée **frontière**.
4. On appelle **demi-plan fermé** l'union d'un demi-plan ouvert et de sa frontière.
5. Des propriétés connues des classes d'équivalences, on sait que les ensembles Π_A et Π_B sont ou bien disjoints, ou bien confondus.
6. On dispose de l'équivalence suivante (connue pour les classes d'équivalence en général) :
$$B \in \Pi_A \Leftrightarrow \Pi_A = \Pi_B .$$
Ainsi, $B \notin \Pi_A$, si et seulement si $\Pi_A \neq \Pi_B$.

On ne sait pas encore à ce stade le nombre de classe d'équivalence pour la relation. Nous connaissons tout de même déjà la réponse depuis longtemps : il y en a que deux.
Pour le prouver, on va démontrer d'abord le théorème suivant :

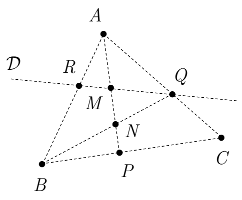
Théorème 5

En anticipant sur l'étude des triangles, ce théorème dit que si une droite coupe deux côtés d'un triangle (hors sommets), alors elle ne coupe pas le troisième côté.

Soient A, B et C trois points non alignés et $\mathcal{D}$ une droite.
Si la droite $\mathcal{D}$ coupe les segments $]AB[$ et $]AC[$, alors elle ne coupe pas le segment $]BC[$.

Preuve

Supposons que la droite $\mathcal{D}$ coupe les segments $]AB[$ et $]AC[$.



Pour le point M, on a : $(QR)\cap(AP)=\mathcal{D}\cap(AP)=\{M\}$.

On pouvait aussi conclure avec les droites (AC) et $\mathcal{D}$.

Supposons par l'absurde que la droite $\mathcal{D}$ coupe aussi le segment $]BC[$.

Notons P, Q et R les points d'intersection respectifs des segments $]BC[$, $]AC[$ et $]AB[$ avec la droite $\mathcal{D}$.

D'après le **théorème 1** appliqué aux points B, Q et C, la droite (AP) coupe le segment $]BQ[$ en un point N qui est situé entre les points A et P.

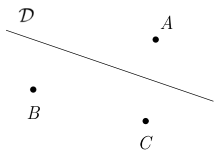
En appliquant alors le même théorème appliqué aux points B, Q et R, la droite (AN) coupe le segment $]QR[$ en un point M qui est situé entre les points A et N.

Puisque le point N est entre les points A et P, le point P n'est pas entre les points A et N et donc les points M et P sont distincts. Ces derniers sont aussi des points de la droite $\mathcal{D}$.

Par conséquent, les droites (AP) et $\mathcal{D}$ sont confondues, ce qui entraîne que le point A est incident à la droite $\mathcal{D}$.

Cette dernière affirmation est absurde puisque les droites (AB) et $\mathcal{D}$ s'intercepte au point R, distinct de A. □

Remarque



Soient A, B et C des points non alignés et non incidents à une droite $\mathcal{D}$.

Il résulte du théorème précédent que si les points A et B sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$ ainsi que les points B et C, alors les points A et C sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$ (exercice facile pour le lecteur, correction en vidéo).

Théorème 6

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan.

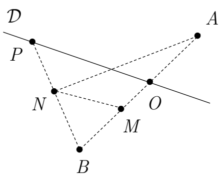
Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « être du même côté de la droite $\mathcal{D}$ ».

Autrement dit, pour une droite donnée dans un plan, il n'y a que deux demi-plans de frontière $\mathcal{D}$.

Preuve

On travaille dans un plan Π où est contenu une droite $\mathcal{D}$.

- On commence déjà par montrer qu'il y a au moins deux classes d'équivalence pour la relation « être du même côté de la droite $\mathcal{D}$ ».



Soient A un point non incident à la droite $\mathcal{D}$ et O un point de la droite $\mathcal{D}$.

Soit B un point de la droite (OA) tel que $B * O * A$.

Il est alors clair que $\Pi_A \neq \Pi_B$ (puisque $B \notin \Pi_A$, c'est-à-dire que A et B ne sont pas du même côté de la droite $\mathcal{D}$).

- On finit par montrer qu'il n'y a pas d'autres classes d'équivalence.

On va montrer que les points M et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$.

Soit M un point qui n'est pas du même côté que le point A par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

Dans le cas où les points A, B et M ne sont alignés, il suffit d'appliquer le **théorème 5** (ou la remarque précédente) : les points M et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$.

Dans le cas où les points A, B et M sont alignés, notons P un point de la droite $\mathcal{D}$ distinct de O et N un point du segment $]PB[$.

On applique le **théorème 1** aux points A, B et N : la droite $\mathcal{D}$ coupe le segment $]AN[$.

En effet, on a $(PB)\cap(AB)=\{B\}$. Si ces points étaient alignés, alors N serait l'intersection des droites (PB) et (AB). Or $B \neq N$ puisque $N \in]PB[$.

Par conséquent, les points A et N sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$. De plus, les points A et M sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}$. De plus ces trois points (on parle ici de A, N et M) ne sont pas alignés.

Il vient alors (remarque précédente ou **théorème 5**) que les points M et N sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$.

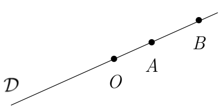
Mais les points B et N sont aussi du même côté de la droite $\mathcal{D}$.

Par transitivité, il vient que les points B et M sont du même côté de la droite $\mathcal{D}$. □

B Demi-droite

Avant de définir cette notion importante, nous avons besoin de deux définitions :

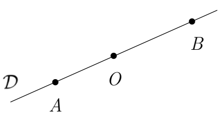
Définition 4



Soient $\mathcal{D}$ une droite, O un point de cette droite, A et B deux points de la droite $\mathcal{D}$ distincts de O.

Dire que les points A et B **sont du même côté de O** signifie que le point O n'est pas entre les points A et B.

Définition 5



Soient $\mathcal{D}$ une droite, O un point de cette droite, A et B deux points de la droite $\mathcal{D}$ distincts de O.

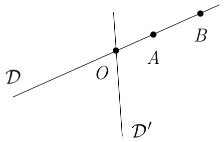
Dire que les points A et B **sont de part est d'autre de O** signifie que le point O est entre les points A et B.

Remarques

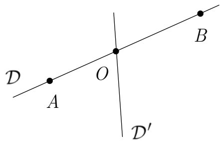
1. Dans la **définition 4**, on abrège « A est du même côté que B par rapport à O » par « A et B sont du même côté de O » en anticipant sur la symétrie de cette relation.

2. La **définition 5** n'est que la négation de la **définition 4** (immédiat).

Ainsi, pour deux points A et B d'une droite $\mathcal{D}$ distincts d'un point O sur cette droite, ils sont soit du même côté de



O, soit ils sont de part et d'autre de O.
On suppose ici que A et B sont du même côté de O.
3. Considérons une droite $\mathcal{D}'$ sécante en O. Montrons que les points A et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}'$.
Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, ils seraient de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}'$ et cette dernière couperait le segment $]AB[$ en un point O'.
Puis, les points O et O' sont distincts (puisque $O' \in]AB[$ et que O n'est pas entre les points A et B). Mais alors, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ seraient confondues (puisqu'on aurait alors $\mathcal{D} = (OO') = \mathcal{D}'$), ce qui est absurde.
4. Il est immédiat de montrer (par l'absurde) que réciproquement si une droite $\mathcal{D}'$ est sécante avec la droite $\mathcal{D}$ en O telle que les points A et B soient du même côté de la droite $\mathcal{D}'$, alors les points A et B sont du même côté de O.



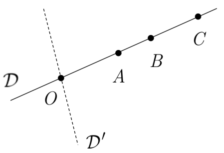
On suppose maintenant que A et B sont de part et d'autre de O.
5. Considérons une droite $\mathcal{D}'$ sécante en O. Montrons que les points A et B sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}'$.
Si les points A et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}'$, alors de ce qui précède, ils sont aussi du même côté de O, ce qui est évidemment contradictoire.
6. Si une droite $\mathcal{D}'$ est sécante avec la droite $\mathcal{D}$ en O telle que les points A et B soient de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}'$, alors les points A et B sont de part et d'autre de O.
En effet, si les points A et B sont du même côté de O, alors de ce qui précède, ils sont aussi du même côté de la droite $\mathcal{D}'$, ce qui est contradictoire.

Les deux caractérisations précédentes permettent de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7

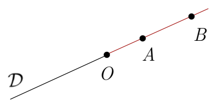
Soit O un point d'une droite $\mathcal{D}$.
La relation « être du même côté de O » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des points de la droite $\mathcal{D}$ privés du point O.

Preuve



La réflexivité et la symétrie sont immédiates en utilisant la définition de la relation.
Montrons qu'elle est transitive.
Soient A, B et C trois points de la droite $\mathcal{D}$ distincts de O.
On suppose d'une part que les points A et B sont du même côté de O et d'autre part que les points B et C sont du même côté de O.
Pour montrer que les points A et C sont du même côté de O, il suffit de considérer une droite $\mathcal{D}'$ sécante avec la droite $\mathcal{D}$ en O.
Via la caractérisation établie plus haut, il vient que les points A et C sont du même côté de la droite $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire que ces mêmes points sont du même côté de O. $\square$

Remarques



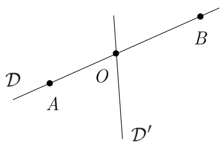
Soient $\mathcal{D}$ une droite, O un point de cette droite, A et B deux points de la droite $\mathcal{D}$ distincts de O.
1. Une classe d'équivalence de la relation « être du même côté de O » est appelée **demi-droite** (**ouverte**).
2. Pour toute demi-droite issue de cette relation, le point O est appelé **origine**.
3. On note $]OA)$ la demi-droite d'origine O et contenant A (ou « passant par A »).
4. On appelle **demi-droite fermée** l'union d'une demi-droite et de son origine. On notera $[OA) =]OA) \cup \{A\}$.
5. Il est clair que $A \in]OA)$ et que si A et B sont du même côté du point O, alors $]OA) =]OB)$.

Théorème 8

Soit O un point d'une droite $\mathcal{D}$.
Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « être du même côté de O ».

Preuve

Commençons par prouver qu'il y en a au moins deux.
Soit A un point de la droite $\mathcal{D}$ distinct de O.
En utilisant l'**axiome 3**, il existe un point B de la droite $\mathcal{D}$ tel que $A * O * B$.
Il est alors clair que $]OA) \neq]OB)$.

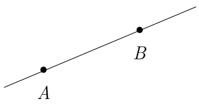


Montrons qu'il y a aux plus deux classes d'équivalence.
Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$ qui n'est pas du même côté que le point A par rapport à O.
Les points A et M sont alors de part et d'autre de O. De plus, par hypothèse, les points A et B sont aussi de part et d'autre de O.

Soit $\mathcal{D}'$ une droite passant par O.
Par la caractérisation vue plus tôt, il revient au même de dire que d'une part les points A et M sont de part et d'autre de la droite $\mathcal{D}'$ et d'autre part, que les points A et B sont de par et d'autre de la droite $\mathcal{D}'$.
Il vient alors que les points M et B sont du même côté de la droite $\mathcal{D}'$, autrement dit, ces deux points sont du même côté de O. □

Remarque
Deux demi-droites distinctes ayant la même origine sont dites **opposés**. Ainsi, toute demi-droite admet une demi-droite opposée et ces deux dernières sont distincts.

Théorème 9
Quels que soient les points distincts A et B :
$$]AB) \cup]BA) = (AB).$$



On rappelle que pour trois points distincts et alignés, un seul d'entre eux est entre les deux autres.

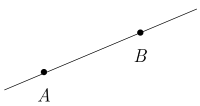
Preuve
Il est clair que $]AB) \subset (AB)$ et $]BA) \subset (AB)$, donc $]AB) \cup]BA) \subset (AB)$.
Soit M un point de la droite (AB).
Si M est entre les points A et B, alors A n'est pas entre les points M et B, d'où $M \in]AB)$, donc $M \in]AB) \cup]BA)$.
Si M n'est pas entre les points A et B, par exemple si $A * B * M$, alors A n'est pas entre les points M et B et on arrive à la même conclusion que précédemment.
Si $M * A * B$, alors c'est le point B qui n'est pas entre les points A et M, d'où $M \in]BA)$, donc $M \in]AB) \cup]BA)$.
Finalement, $(AB) \subset]AB) \cup]BA)$ et donc $]AB) \cup]BA) = (AB)$. □

Remarque
La formalisation du **théorème 9** donne :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, A \neq B \Rightarrow]AB) \cup]BA) = (AB).$$

Théorème 10
Quels que soient les points distincts A et B :
$$]AB) \cap]BA) =]AB[.$$

Si $M \in]AB[$, alors d'une part A n'est pas entre B et M et d'autre part, B n'est pas entre les points A et M.

Raisonnement par l'absurde.



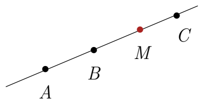
Preuve
L'inclusion $]AB[\subset]AB) \cap]BA)$ s'établie comme précédemment.
Soit M un point de $]AB) \cap]BA)$.
Supposons que $M \notin]AB[$ (autrement dit, on suppose que M n'est pas entre les points A et B).
Il y a alors quatre possibilités.
Ou bien le point A est entre les points B et M, alors le point M est sur la demi-droite opposée à $]AB)$, mais alors on aurait $M \notin]AB) \cap]BA)$, contradiction.
Ou bien le point B est entre les points A et M, mais dans ce cas on arrive à la même contradiction.
Ou bien le point M est confondu avec le point A. Mais il est évidemment que $A \notin]AB) \cap]BA)$, contradiction.
Ou bien le point M est confondu avec le point B, mais on arrive encore à une contradiction.
Ainsi, $M \in]AB[$, soit $]AB) \cap]BA) \subset]AB[$, d'où $]AB) \cap]BA) =]AB[$. □

Remarque
La formalisation du **théorème 10** donne :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, A \neq B \Rightarrow]AB) \cap]BA) =]AB[.$$

La démonstration du **théorème 11** est immédiate.

Théorème 11
Soient A, B et C trois points tels que $A * B * C$.
$$]AB) =]AC).$$

Théorème 12
Soient A, B et C trois points tels que $A * B * C$.
$$]BC) \subset]AC).$$



Preuve

Soit M un point de $]BC)$.

D'une part, les points M et C sont du même côté de B.
D'autre part, les points A et C sont de part et d'autre de B.
Les points A et M sont par conséquent de part et d'autre de B (raisonnement par l'absurde immédiat).
Mais alors, le point A n'est pas entre les points B et M. Donc ces derniers sont du même côté de A.
Ainsi, le point M appartient à $]AB)$.

Enfin, comme les points B et C sont du même côté de A, on a $]AB) =]AC)$.

Finalement, $M \in]AC)$ et donc $]BC) \subset]AC)$. □

Théorème 13

Soient A, B et C trois points tels que $A * B * C$.

$$]BC[\subset]AC[.$$

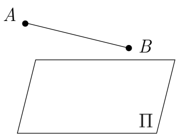
Preuve

D'une part, $]BC) \cap]CB) =]BC[$ (**théorème 10**), d'autre part, $]BC) \subset]AC)$ et $]CB) \subset]CA)$ (**théorème 12**).

Donc $]BC) \cap]CB) \subset]AC) \cap]CB)$, soit $]BC[\subset]AC) \cap]CA)$, ou encore $]BC[\subset]AC[$. □

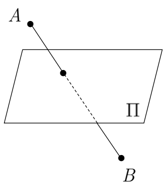
C Demi-espace

On dira qu'un plan « coupe » un segment non nul quand le support de ce segment est sécant avec le plan et si le point d'intersection est entre les extrémités du segment.
Nous disposons ainsi des définitions suivantes :



Définition 6

Soient A et B deux points non incidents à un plan Π.
Dire que les points A et B **sont du même côté de Π** signifie qu'ils sont confondus ou que le segment $]AB[$ ne contient aucun point incident à Π.



Définition 7

Soient A et B deux points non incidents à un plan Π.
Dire que les points A et B **sont de part et d'autre de Π** signifie qu'ils sont distincts et qu'il existe un point du segment $]AB[$ incident à Π.

Remarques

1. Dans la **définition 6**, on abrège « A est du même côté que B par rapport à Π » par « A et B sont du même côté de Π » en anticipant sur la symétrie de cette relation.
2. La **définition 7** n'est que la négation de la **définition 6** (immédiat).
Ainsi, pour deux points A et B non incidents à un plan Π, ils sont soit du même côté de Π, soit de part et d'autre de Π.

Le théorème suivant est prévisible :

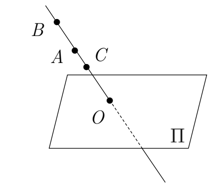
Théorème 14

Soit Π un plan.
La relation « être du même côté de Π » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des points de l'espace non incidents à Π.

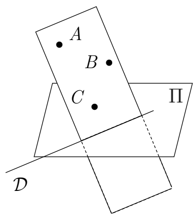
Preuve

La réflexivité et la symétrie sont immédiates.
Montrons que la relation est transitive.
Soient A, B et C trois points non incidents à Π tels que d'une part A et B sont du même côté de Π et d'autre part B et C sont du même côté de Π.
Dans le cas où les points A, B et C sont alignés, il y a deux cas.
Ou bien la droite les contenant est parallèle au plan Π : par définition, aucun point du segment $]AC[$ est incident à Π ; il est alors clair que A et C sont du même côté de Π.

Le cours du chapitre 2



Ou bien la droite les contenant est sécante avec le plan Π en un point O.
Par les propriétés de l'ordre sur une droite, on en déduit que A et C sont du même côté de O et donc de Π.
Dans le cas où les points A, B et C ne sont pas alignés, il y a encore deux cas.
Ou bien le plan les contenant est parallèle au plan Π : par définition, aucun point du segment $]AC[$ est incident à Π ; il est alors clair que A et C sont du même côté de Π.



Ou bien le plan les contenant est sécant avec le plan Π selon une droite $\mathcal{D}$: cette droite ne coupe pas les segments $]AB[$ et $]BC[$, donc ne coupe pas aussi le segment $]AC[$ (contraposée de l'**axiome de Pasch**).
Ainsi, les points A et C sont du même côté de Π. □

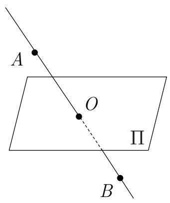
Remarques
Soit A un point non incident à un plan Π.
1. Une classe d'équivalence de la relation « être du même côté de Π » est appelée **demi-espace** (**ouvert**).
2. On note $\mathcal{E}_A$ le demi-espace contenant A.
3. Pour tout demi-espace, le plan Π est appelé **frontière**.
4. On appelle **demi-espace fermé** l'union d'un demi-espace ouvert et de sa frontière.

Attention, ici la frontière est un plan alors que c'est une droite quand il s'agit d'un demi-plan.

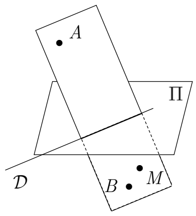
Théorème 15

Soit Π un plan.
Il n'y a que deux classes d'équivalence pour la relation « être du même côté de Π ».

Preuve
On commence par prouver qu'il y en a au moins deux.



Soit A un point non incident à Π (**axiome 6** du **chapitre 1**) et O un point du plan Π.
La droite (AO) et le plan Π sont donc sécants en O.
Il existe un point B de la droite (AO) tel que $A * O * B$.
Donc les points A et B sont de part et d'autre de Π.
Les classes $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ sont alors distinctes.
Montrons qu'il n'y a pas d'autre classe d'équivalence.



Soit M un point qui n'est pas du même côté que A par rapport au plan Π.
Montrons qu'il est du même côté que B par rapport au plan Π.
Dans le cas où les points A, B et M sont alignés c'est facile : par les propriétés de l'ordre sur une droite, on conclut que les points B et M sont du même côté de Π.
Dans le cas où les points A, B et M ne sont pas alignés : le plan les contenant est sécant avec le plan Π selon une droite $\mathcal{D}$. Cette droite coupe les segments $]AB[$ et $]AM[$; elle ne coupe donc pas le segment $]BM[$ (**théorème 5**).
Ainsi, les points B et M sont du même côté de Π. □

Remarque
Deux demi-espaces (ou demi-plan) distincts ayant la même frontière sont dits **opposés**.

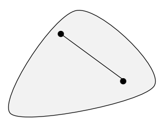
3 Convexité

A Définition

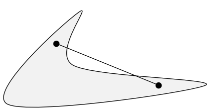
Définition 8

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de l'espace.
Dire que l'ensemble $\mathcal{C}$ est **convexe** signifie que tout point situé sur un segment joignant deux points de $\mathcal{C}$ est encore dans $\mathcal{C}$.

Voici ci-dessous une partie convexe :



Voici ci-dessous une partie qui n'est pas convexe :



Remarques
1. Avec des quantificateurs, dire que l'ensemble $\mathcal{C}$ est convexe signifie que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \begin{cases} A \in \mathcal{C} \\ B \in \mathcal{C} \end{cases} \Rightarrow]AB[\subset \mathcal{C}.$$

2. Avec des quantificateurs, dire que l'ensemble $\mathcal{C}$ est convexe signifie aussi que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \{A, B\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow]AB[\subset \mathcal{C}.$$

3. L'ensemble vide est une partie convexe.

Le cours du chapitre 2

B Propriété fondamentale

Le **théorème 16** est important.

Théorème 16

L'intersection de deux parties convexes est convexe.

Preuve

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux parties convexes, A et B deux éléments de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

Les points A et B sont à la fois dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}'$.

Alors $]AB[\subset \mathcal{C}$ et $]AB[\subset \mathcal{C}'$.

Donc $]AB[\subset \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. □

Remarques

1. On généralise facilement le **théorème 16** à une famille de parties convexes.
2. La réunion de deux parties convexes n'est pas nécessairement convexe.

C Parties convexes remarquables

Théorème 17

Toute droite est convexe.

Preuve

Dans les preuves, le cas où les points A et B sont confondus est trivial.

Soient A et B deux points distincts appartenant à une droite $\mathcal{D}$.

Soit M un point du segment $]AB[$ (dont l'existence est garantie par le **théorème 2**).

Ce point vérifie alors la relation $A * M * B$.

Donc (**axiome 1**) les points A, M et B sont alignés et alors $M \in (AB)$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{D}$ (par unicité de la droite passant par les points A et B).

On pouvait aussi remarquer que le segment $]AB[$ est inclus dans la droite (AB) (**théorème 9** et **10**).

Ainsi $]AB[\subset \mathcal{D}$. □

La démonstration du **théorème 18** est immédiate : il suffit de remarquer qu'une droite est toujours incluse dans un plan.

Théorème 18

Tout plan est convexe.

Théorème 19

Toute demi-droite est convexe.

Preuve

Soient A et B deux points distincts appartenant à une demi-droite $\mathcal{D}_O$ d'origine O.

Les points A, B et O sont donc alignés, et alors (**théorème 3**), un seul d'entre eux est entre les deux autres. Plus précisément, c'est soit le point A, soit le point B qui est entre les deux autres.

Les points A et B sont du même côté de O : par définition le point O ne peut pas être entre les points A et B.

Supposons par exemple que le point A est entre les points O et B.

D'après le **théorème 12**, on a $]AB) \subset]OB)$. De plus, il est clair que $]AB[\subset]AB)$ (via le **théorème 10**).

Par transitivité de l'inclusion, on obtient donc $]AB[\subset]OB)$, soit $]AB[\subset \mathcal{D}_O$. □

La démonstration du **théorème 20** est immédiate : il suffit de remarquer qu'un segment est toujours l'intersection de deux demi-droites (**théorème 10**).

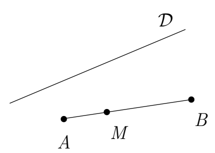
Théorème 20

Tout segment est convexe.

Théorème 21

Tout demi-plan est convexe.

Preuve



Considérons un demi-plan $\Pi_{\mathcal{D}}$ de frontière une droite $\mathcal{D}$.

Soient A et B deux points distincts du demi-plan $\Pi_{\mathcal{D}}$ et soit M un point du segment $]AB[$ (**théorème 2**).

D'après le **théorème 13**, on a $]AM[\subset]AB[$.

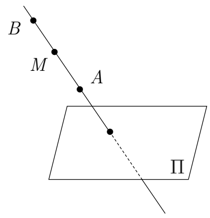
Or la droite $\mathcal{D}$ ne peut pas couper le segment $]AB[$ (**définition 2**), et donc elle ne peut pas couper non plus le segment $]AM[$.

Ce qui prouve que $M \in \Pi_{\mathcal{D}}$ et donc que $]AB[\subset \Pi_{\mathcal{D}}$. □

Théorème 22

Tout demi-espace est convexe.

La preuve reprend en tout point ce qui a été dit précédemment.



Preuve

Considérons un demi-espace $\mathcal{E}_\Pi$ de frontière un plan Π.

Soient A et B deux points distincts du demi-espace $\mathcal{E}_\Pi$ et soit M un point du segment $]AB[$ (**théorème 2**).

D'après le **théorème 13**, on a $]AM[\subset]AB[$.

Or le plan Π ne peut pas couper le segment $]AB[$ (**définition 6**), et donc il ne peut pas couper non plus le segment $]AM[$.

Ce qui prouve que $M\in\mathcal{E}_\Pi$ et donc que $]AB[\subset\mathcal{E}_\Pi$. □

Remarque

De ce qui précède, on prouve facilement que les demi-droites fermées, les segments fermés, les demi-plans fermés et les demi-espaces fermés sont des parties convexes.

Faisons-le par exemple pour les demi-droites fermées (les autres cas se basent sur le même principe que ci-dessous).

Soient A et B deux points distincts appartenant à une demi-droite fermée $\mathcal{D}_O\cup\{O\}$ d'origine O.

- Admettons que les points A et B sont distincts du point O.

On utilise la convexité de la demi-droite pour la première inclusion.

On a alors clairement $]AB[\subset\mathcal{D}_O$, et comme $\mathcal{D}_O\subset\mathcal{D}_O\cup\{O\}$, on obtient $]AB[\subset\mathcal{D}_O\cup\{O\}$.

- Admettons maintenant que le point A est confondu avec le point O ou que le point B est confondu avec le point O.

Dans le cas où $A=O$, on a $]AB[=]OB[$. Puis, $]OB[\subset]OB)$, donc $]OB[\subset\mathcal{D}_O$ (puisque $]OB)=\mathcal{D}_O$).

On a donc $]AB[\subset\mathcal{D}_O$, soit $]AB[\subset\mathcal{D}_O\cup\{O\}$.

On procède de la même façon lorsque $B=O$.