# Théorie naïve des ensembles

# 1

## Introduction

Conformément aux objectifs fixés, le point de vue adopté dans ce chapitre est une approche naïve de la théorie des ensembles. Néanmoins, quelques références aux axiomes de la théorie des ensembles seront nécessaires.
Historiquement, la notion d'ensemble a été introduite au XIXe siècle par **Cantor** puis formalisés notamment par **Frege**, qui introduit les ensembles à partir de la notion de prédicat.

**George Cantor** (1845-1918) était un mathématicien allemand.
**Gottlob Frege** (1848-1925) était un mathématicien, logicien et philosophe allemand.

La théorie des ensembles nous servira de base pour établir toutes les théories mathématiques que l'on rencontrera à travers les chapitres d'algèbre, d'analyse, de géométrie et de probabilité.
Ce chapitre est donc incontournable et il n'est pas envisageable d'en faire l'impasse.

## Prérequis

- Niveau Terminale (Bac + 1 dans l'idéal)
- Notions élémentaires de logique (connecteurs logiques, quantificateurs, théorèmes de logique...)
- Connaître et utiliser les différents types de raisonnements (par l'absurde, par disjonction de cas, par contraposition...)

## Objectifs du chapitre

- Introduire les opérations élémentaires sur les ensembles
- Etudier les opérations élémentaires sur les ensembles

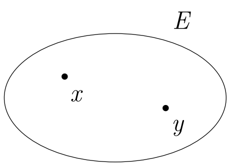
# Le cours du chapitre 1

## A Introduction et premières notions

### 1 La notion d'ensemble

Grosso modo, un ensemble est une sorte d'enveloppe virtuelle.

Un groupe d'amis, une grappe de raisin, un ensemble de points sont d'autant d'exemple d'ensembles de choses. Nous avons tous une idée intuitive de ce qu'est un ensemble et nous nous contenterons de cette idée.
Le concept mathématique d'un ensemble peut servir de fondement à toutes les branches connues des mathématiques.
Dans ce cours, nous n'avons pas la prétention de définir ce qu'est réellement un ensemble. On dit que c'est une notion **primitive** (ou première). Les ensembles sont traditionnellement notés au moyen d'une lettre de l'alphabet (en majuscule).
Il apparait alors la nécessité d'appartenir ou non dans un ensemble. C'est aussi une notion primitive.
Pour signifier que $x$ est un élément de l'ensemble $E$ on écrit $x \in E$ et on lit « $x$ appartient à $E$ » ou « $x$ est un élément de $E$ ». Si $x$ n'est pas un élément de $E$ on écrit $x \notin E$ et on dit que « $x$ n'appartient pas à $E$ ».




**Remarques**
1. L'énoncé « $x \in E$ » est un prédicat. Sa négation est l'énoncé « $x \notin E$ ».
2. Traditionnellement, on représente les ensembles au moyen de **diagrammes de Venn** (voir le dessin ci-contre). Les éléments d'un ensemble (s'il y en a) sont représentés par des points ou le plus souvent par des croix. Le nom des éléments ainsi que le nom de l'ensemble sont indiqués sur le côté.

### 2 Définir un ensemble

Il existe plusieurs manières de définir un ensemble.
Définir un ensemble en **extension**, c'est énumérer tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 10 se note :

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

Il est aussi possible, s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, d'utiliser des points de suspension. Ainsi, l'ensemble précédent peut aussi se noter :

Si l'ensemble est infini, on peut se contenter de donner quelques éléments à condition qu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté.
Par exemple, l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

$$\{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 10\}.$$

Définir un ensemble en **compréhension**, c'est caractériser ses éléments à l'aide d'une propriété caractéristique. L'ensemble pris précédemment peut s'écrire :

$$\{n \in \mathbb{N}, n \leqslant 10\}.$$

D'une manière générale, lorsqu'un ensemble $E$ est défini en compréhension, il s'écrit : $\{x \in E, P(x)\}$, où $P$ est un prédicat défini sur $E$.

### 3 Cardinal d'un ensemble

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble (qui n'est pas infini) est son nombre d'éléments. Nous définirons rigoureusement dans le **chapitre 8** cette notion.
En attendant, gardons-en l'idée intuitive car elle nous sera utile.

**Exemple**
Le cardinal de l'ensemble $\{1,\ \{2,\ 3\}\}$ est égal à 2.

L'existence d'un tel ensemble est admise.

**Définition 1**

On appelle **ensemble vide** tout ensemble qui ne comporte aucun élément.

Il existe un axiome (l'**axiome d'extensionalité**) qui permet de prouver qu'il n'existe qu'un ensemble vide. Nous l'admettons dans ce cours.
L'ensemble vide est noté $\varnothing$.

**Définition 2**

On appelle **singleton** tout ensemble qui ne comporte qu'un seul élément.

**Exemples**
1. L'ensemble $\{\varnothing\}$ est un singleton car il possède bien qu'un élément (l'ensemble vide).
2. L'ensemble $\{\{1,\ 2\}\}$ est aussi un singleton car il possède qu'un élément (l'ensemble $\{1,\ 2\}$).

# Le cours du chapitre 1

On rappelle que dans l'écriture d'un ensemble en extension, un élément se compte qu'une fois.

**Remarque**
On considérera par exemple que l'ensemble $\{\varnothing, \varnothing\}$ est un singleton.

**Définition 3**

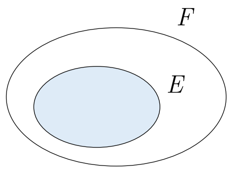
On appelle **paire** tout ensemble qui ne comporte que deux éléments.

Cette équation admet deux solutions complexes conjuguées l'un l'autre.

**Exemple**
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue $x$ : $x^2 + x + 1 = 0$ , est une paire.

## B Inclusion et égalité de deux ensembles

### 1 Définition




**Définition 4**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Dire que l'ensemble $E$ est un **sous-ensemble** de l'ensemble $F$, signifie que :

$$\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F .$$

**Remarques**
1. La **définition 4** dit simplement qu'il y a synonyme entre $E$ est un sous-ensemble de $F$ et que tout élément de $E$ est un élément de $F$ (c'est conforme au diagramme ci-dessus).
2. Pour signifier que l'ensemble $E$ est un sous-ensemble de $F$, on écrit : $E \subset F$ .
3. On dit aussi que $E$ est **inclus** dans $F$, que $E$ est une **partie** de $F$ ou encore que $F$ **contient** $E$.
4. Ne pas confondre le symbole « $\subset$ » avec celui de l'appartenance « $\in$ ». Par exemple, pour l'ensemble $\{\{1\}, 2\}$, le singleton $\{1\}$ appartient à cet ensemble alors que le singleton $\{2\}$ est une partie de cet ensemble.

**Exemple**
Que peut-on dire des ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 1, 3\}$ ?
Tous les éléments du premier ensemble sont aussi des éléments du second. Il vient donc que $\{1, 2\} \subset \{2, 1, 3\}$ .

### 2 Egalité de deux ensembles

C'est l'axiome d'extensionalité.

Dans la théorie axiomatique des ensembles, il existe un axiome garantissant l'égalité de deux ensembles : quand ces derniers ont les mêmes éléments.
L'égalité de deux ensembles quant à elle répond à trois axiomes :

Comme pour la notion d'ensemble, on ne définit pas l'égalité mais on donne des axiomes qui permettent d'utiliser cette notion (qui est une relation comme on le verra dans le chapitre suivant).

**Axiomes** **Axiomes de l'égalité**

Quels que soient les ensembles $E$, $F$ et $G$ :

$$1)\ \ E = E \qquad 2)\ \ E = F \Rightarrow F = E \qquad 3)\ \ \begin{cases} E = F \\ F = G \end{cases} \Rightarrow E = G .$$

Le théorème suivant est évident et se démontre à partir des axiomes précédents :

**Théorème 1**

Quels que soient les ensembles $E$, $F$ et $G$ :

$$\begin{cases} E = F \\ E = G \end{cases} \Rightarrow F = G .$$

**Preuve**
Supposons que $E = F$ et $E = G$.
L'égalité $E = F$ entraîne que $F = E$.
Puis, en utilisant le troisième axiome de l'égalité, il vient que $F = G$. □

Le **théorème 2** est une conséquence directe de l'axiome d'extensionalité et de la **définition 4**.

**Théorème 2**

Quels que soient les ensembles $E$ et $F$ :

$$E = F \Leftrightarrow ((E \subset F) \wedge (F \subset E)) .$$

# Le cours du chapitre 1

**Remarques**

1. En utilisant les connecteurs logiques, on a : $E = F \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.

2. Il se peut que $E \subset F$ sans que les ensembles $E$ et $F$ soient égaux (c'est le cas le plus fréquent). Dans ce cas, on peut écrire que $E \subsetneq F$ mais cette notation est rarement utilisée.

D'autres auteurs font l'inverse. Ils utilisent la notation $E \subset F$ pour indiquer que $E$ est un sous-ensemble de $F$ mais avec les ensembles $E$ et $F$ distincts puis la notation $E \subseteq F$ pour indiquer que $E \subset F$ ou $E = F$.

3. On note $E \not\subset F$ la négation de $E \subset F$, c'est-à-dire : $\exists x, (x \in E) \wedge (x \notin F)$.

## 3 Propriétés de l'inclusion

**Théorème 3**

Quels que soient les ensembles $E$, $F$ et $G$ :

$$1)\ \varnothing \subset E \qquad 2)\ E \subset E \qquad 3)\ \begin{cases} E \subset F \\ F \subset G \end{cases} \Rightarrow E \subset G.$$

**Preuve**

On rappelle que l'inclusion $\varnothing \subset E$ abrège l'assertion $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$.

1) L'assertion $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$ est toujours vraie car la prémisse de l'implication n'est jamais vérifiée quel que soit l'objet $x$ choisi.

2) L'inclusion $E \subset E$ est une conséquence directe de la tautologie $P \Rightarrow P$ où $P$ est une assertion.

3) Cette implication est une conséquence de la tautologie $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{cases} \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ où $P$, $Q$ et $R$ sont des assertions. □

## 4 Ensemble des sous-ensembles d'un ensemble

Dans la théorie axiomatique des ensembles, il existe un axiome affirmant l'existence d'un ensemble dont les seuls éléments sont tous les sous-ensembles de l'ensemble.

Cet axiome s'appelle l'axiome de l'ensemble des parties.

Nous noterons pour un ensemble $E$, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de tous ses sous-ensembles.

Immédiatement, on remarque que l'ensemble vide est nécessairement un élément d'un tel ensemble puisqu'il est inclus dans tout ensemble. Cela montre que l'ensemble des parties d'un ensemble n'est jamais vide.

**Exemple**

Déterminons l'ensemble des parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Afin de n'oubliez aucun élément, on va déterminer les parties de cet ensemble composée d'aucun élément, puis d'un élément, puis de deux éléments, etc.

Il n'existe qu'un ensemble comportant aucun élément : c'est l'ensemble vide.

Trois parties de l'ensemble sont composées d'un seul élément : $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$.

Trois parties de l'ensemble sont composée de deux éléments : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$.

Une seule partie de l'ensemble est composée de trois éléments : l'ensemble lui-même.

Ainsi, $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

**Théorème 4**

Le **théorème 4** est une conséquence immédiate de la définition de l'ensemble des parties d'un ensemble.

Quels que soient les ensembles $A$ et $E$ :

$$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E).$$

**Remarque**

Cette remarque est importante.

Si $x$ est un élément de $E$ alors $\{x\}$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$ et inversement.

**Théorème 5**

Quels que soient les ensembles $E$ et $F$ :

$$E = F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F).$$

**Preuve**

$(\Rightarrow)$ Evident.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Soit $x$ un élément de $E$.

Alors $\{x\} \subset E$, autrement dit $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$, soit $\{x\} \in \mathcal{P}(F)$, c'est-à-dire $x \in F$.

On a montré l'inclusion $E \subset F$.

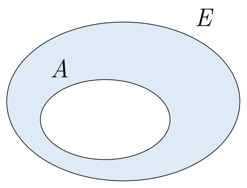
De la même manière, on montre aussi que $F \subset E$ .

Donc finalement, les ensembles $E$ et $F$ sont égaux. $\square$

Cette partie du cours est fondamentale pour la suite.

## C Opérations dans l'ensemble des parties d'un ensemble

### 1 Complémentaire d'un ensemble




**Définition 5**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.

On appelle **complémentaire** de l'ensemble $A$ dans l'ensemble $E$ l'ensemble :

$$\{x \in E, x \notin A\} \, .$$

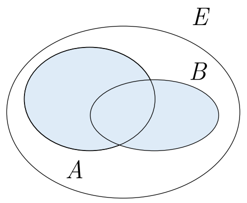
**Remarque**

On note $\complement_E A$ ou $\overline{A}$ (s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté) le complémentaire de $A$ dans $E$.

**Exemple**

Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, le complémentaire du sous-ensemble $\{2, 5, 6\}$ est l'ensemble $\{1, 3, 4\}$.

### 2 Réunion de deux ensembles




**Définition 6**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

On appelle **réunion** des ensembles $A$ et $B$ l'ensemble :

$$\{x \in E, (x \in A) \vee (x \in B)\} \, .$$

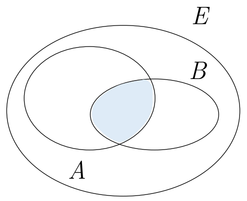
**Remarques**

1. On note $A \cup B$ la réunion des ensembles $A$ et $B$.
2. Rappelons qu'en mathématique, le « ou » est inclusif.

**Exemple**

Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la réunion des sous-ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, 6\}$ est l'ensemble $\{1, 2, 3, 6\}$.

### 3 Intersection de deux ensembles




**Définition 7**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

On appelle **intersection** des ensembles $A$ et $B$ l'ensemble :

$$\{x \in E, (x \in A) \wedge (x \in B)\} \, .$$

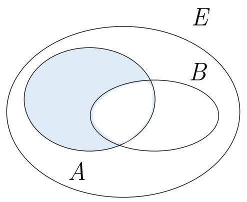
**Remarques**

1. On note $A \cap B$ l'intersection des ensembles $A$ et $B$.
2. Deux ensembles **disjoints** sont deux ensembles qui ont une intersection vide.

**Exemple**

Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'intersection des sous-ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, 6\}$ est le singleton $\{2\}$.

### 4 Différence de deux ensembles




**Définition 8**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

On appelle **différence** des ensembles $A$ et $B$ (dans cet ordre) l'ensemble :

$$\{x \in E, (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \, .$$

**Remarques**

1. On note $A - B$ ou $A \setminus B$ la différence dans cet ordre des ensembles $A$ et $B$.
2. D'après la **définition 8**, $A - B = A \cap \overline{B}$ .

# Le cours du chapitre 1

**Exemple**

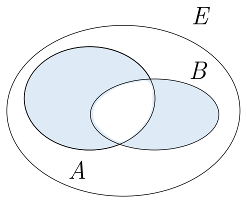
Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la différence des sous-ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, 6\}$ dans cet ordre vaut $\{1\}$ alors que la différence des ensembles $\{2, 3, 6\}$ et $\{1, 2\}$ dans cet ordre vaut $\{3, 6\}$.

Autrement dit, pour $A$ et $B$ qui sont des parties d'un ensemble $E$, il est possible que $A - B \neq B - A$ .

Ce qui montre que l'ordre des ensembles a une importance quand on effectue la différence.

## 5 Différence symétrique de deux ensembles

La définition de la différence symétrique est plus lourde :




**Définition 9**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.
On appelle **différence symétrique** des ensembles $A$ et $B$ l'ensemble, noté $A\Delta B$ et défini par l'égalité :

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

**Remarque**

D'après la **définition 9**, $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ .

**Exemple**

Dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la différence symétrique des sous-ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, 6\}$ vaut $\{1, 3, 6\}$.

# D Propriétés des opérations sur les ensembles

## 1 Propriétés liées au complémentaire

**Théorème 6**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.

$$1)\ \overline{\varnothing} = E \qquad 2)\ \overline{E} = \varnothing \qquad 3)\ \overline{\overline{A}} = A\,.$$

Le complémentaire considéré est ici dans $E$.

**Preuve**

1) L'ensemble $\overline{\varnothing}$ est par définition une partie de $E$, donc $\overline{\varnothing} \subset E$ .

On rappelle qu'une disjonction de deux assertions est vraie quand au moins l'une des deux assertions est vraie.

L'assertion $\forall x \in E, x \in E \Rightarrow x \in \overline{\varnothing}$ équivalente à l'assertion $\forall x \in E, (x \notin E) \vee (x \notin \varnothing)$ est vraie puisque l'assertion $x \notin \varnothing$ est vraie quel que soit l'élément $x$ dans $E$.

Ainsi, $E \subset \overline{\varnothing}$ .

2) Il suffit d'appliquer 3) aux deux ensembles de l'égalité $\overline{\varnothing} = E$ .

3) C'est une conséquence directe de la tautologie $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ où $P$ est une assertion. □

## 2 Propriétés liées à la réunion

**Théorème 6**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ A \cup B = B \cup A \qquad 2)\ A \cup A = A \qquad 3)\ A \cup \overline{A} = E \qquad 4)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,.$$

Ces égalités sont à connaître par cœur.

**Preuve**

1) C'est une conséquence directe de la tautologie $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ où $P$ et $Q$ sont des assertions.

2) C'est une conséquence directe de la tautologie $P \vee P \Leftrightarrow P$ où $P$ est une assertion.

3) La tautologie $P \Rightarrow P$ où $P$ est une assertion est équivalence à la tautologie $\overline{P} \vee P$ .

L'inclusion $A \cup \overline{A} \subset E$ est vraie par définition de la réunion.

Cette remarque permet alors de comprendre pourquoi l'assertion $\forall x \in E, x \in E \Rightarrow x \in A \cup \overline{A}$ est vraie donc que l'inclusion $E \subset A \cup \overline{A}$ est vraie.

4) C'est une conséquence directe de la tautologie $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ où $P$, $Q$ et $R$ sont des assertions. □

## 3 Lois de De Morgan

**Théorème 7** Lois de De Morgan

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad 2)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\,.$$

**Auguste De Morgan** était un mathématicien britannique (1806-1871). Ces deux égalités permettent de passer d'une égalité avec la réunion à une égalité avec l'intersection et *vice versa*.

**Preuve**

1) C'est une conséquence directe de la tautologie $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ où $P$ et $Q$ sont des assertions.

2) D'après 1), on a $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$, d'où $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B}$, c'est-à-dire $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$. □

## 4 Propriétés liées à l'intersection

Ces égalités sont à connaître par cœur.

**Théorème 8**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1) $A \cap B = B \cap A$  2) $A \cap A = A$  3) $A \cap \overline{A} = \varnothing$  4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

**Preuve**

1) Puisque $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{B} \cup \overline{A}$, il vient que $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{B} \cup \overline{A}}$, soit $A \cap B = B \cap A$.

2) Puisque $\overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A}$, il vient que $\overline{\overline{A} \cup \overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, soit $A \cap A = A$.

3) Puisque $A \cup \overline{A} = E$, il vient que $\overline{A \cup \overline{A}} = \overline{E}$, soit $\overline{A} \cap A = \varnothing$.

4) Puisque $\overline{A} \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup \overline{C}$, il vient que $\overline{\overline{A} \cup (\overline{B} \cup \overline{C})} = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup \overline{C}}$, soit $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. □

## 5 Distributivité

Le **théorème 9** fait penser à l'axiome de la distributivité apprise au collège avec les nombres réels.

**Théorème 9**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

**Preuve**

1) C'est une conséquence directe de la tautologie $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ où $P$, $Q$ et $R$ sont des assertions.

2) D'après ce qui précède, on a $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$, soit $\overline{\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})} = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})}$, c'est-à-dire $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

**Remarque**

Le sens le plus utilisé en pratique est celui qui consiste à distribuer. Mais n'oubliez pas aussi que l'autre sens est utilisé en pratique !

Beaucoup d'exercices utilise d'ailleurs l'autre sens.

## 6 D'autres propriétés de l'inclusion

Les propriétés liées à l'inclusion sont nombreuses. Il faut les connaître et savoir les utiliser en pratique sans avoir à les justifier de nouveau.

**Théorème 10**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

**Preuve**

C'est une conséquence directe de la tautologie $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ où $P$ et $Q$ sont des assertions. □

**Théorème 11**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1) $A \subset A \cup B$  2) $A \cap B \subset A$.

L'axiomatisation la plus connue pour justifier les raisonnements logiques et celui d'**Hilbert-Ackermann**.

**Preuve**

1) C'est une conséquence directe de l'axiome de logique $P \Rightarrow P \vee Q$ où $P$ et $Q$ sont des assertions.

2) De ce qui précède, $\overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, puis en utilisant le **théorème 10**, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset \overline{\overline{A}}$, soit $A \cap B \subset A$. □

**Remarques**

1. Bien évidemment, on a aussi $B \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B$.
2. Une conséquence du **théorème 11** est que $A \cap B \subset A \cup B$.

# Le cours du chapitre 1

L'utilisation de ces implications est très courante.

## Théorème 12

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \qquad 2)\ A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C\,.$$

### Preuve

1) C'est une conséquence de l'axiome de logique $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R))$ où $P$, $Q$ er $R$ sont des assertions.

2) Supposons que $A \subset B$.

Alors $\overline{B} \subset \overline{A}$, donc, en composant par $\overline{C}$, $\overline{B} \cup \overline{C} \subset \overline{A} \cup \overline{C}$, soit $\overline{\overline{A} \cup \overline{C}} \subset \overline{\overline{B} \cup \overline{C}}$, c'est-à-dire $A \cap C \subset B \cap C$. □

**Remarque**

Attention, les deux implications précédentes ne sont pas toujours des équivalences !

Par exemple, avec les sous-ensembles suivants définis par les égalités :

$$A = \{2, 3, 4\}\,,\ B = \{3, 4, 5\} \text{ et } C = \{1, 2\}\,,$$

on a $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec $A \cup C \subset B \cup C$ mais l'ensemble $A$ n'est pas inclus dans $B$...

Essayons de même avec l'autre implication en prenant comme sous-ensembles :

$$A = \{3, 4, 5\}\,,\ B = \{2, 3, 4, 6\} \text{ et } C = \{1, 2, 3, 4\}\,.$$

On a $A \cap C = \{3, 4\}$ et $B \cap C = \{2, 3, 4\}$ avec $A \cap C \subset B \cap C$ mais l'ensemble $A$ n'est pas inclus dans $B$...

Le **théorème 13** généralise le théorème précédent.

## Théorème 13

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ \begin{cases} A \subset B \\ C \subset D \end{cases} \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D \qquad 2)\ \begin{cases} A \subset B \\ C \subset D \end{cases} \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D\,.$$

### Preuve

1) Supposons que $A \subset B$ et $C \subset D$.

D'une part, on a $A \cup C \subset B \cup C$ (**théorème 12**) et d'autre part on a $C \cup B \subset D \cup B$.

Utilisation de la transitivité de l'inclusion.

Il vient alors que $A \cup C \subset D \cup B$.

2) Supposons que $A \subset B$ et $C \subset D$.

Alors $\overline{B} \subset \overline{A}$ et $\overline{D} \subset \overline{C}$.

Il vient alors que $\overline{B} \cup \overline{D} \subset \overline{A} \cup \overline{C}$, soit $\overline{\overline{A} \cup \overline{C}} \subset \overline{\overline{B} \cup \overline{D}}$, c'est-à-dire $A \cap C \subset B \cap D$. □

Le **théorème 14** fournit une méthode pour montrer une inclusion.

## Théorème 14

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B\,.$$

### Preuve

$(\Rightarrow)$ Supposons que $A \subset B$.

Alors $A \cup B \subset B \cup B$, c'est-à-dire $A \cup B \subset B$.

L'inclusion $B \subset A \cup B$ est toujours vérifiée (**théorème 11**).

$(\Leftarrow)$ Supposons que $A \cup B = B$.

Comme on a toujours $A \subset A \cup B$, il vient que $A \subset B$. □

**Remarque**

Comme $A$ est une partie de $E$ et que l'ensemble vide est une partie de $A$, on a $A \cup E = E$ et $A \cup \varnothing = A$.

Le **théorème 15** fournit une méthode pour montrer une inclusion.

## Théorème 15

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A\,.$$

### Preuve

Pour aller vite, nous pouvons procéder ici par équivalence.

On a : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow \overline{B} \cup \overline{A} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{\overline{B} \cup \overline{A}} = \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow B \cap A = A\,.$ □

**Remarque**

Comme $A$ est une partie de $E$ et que l'ensemble vide est une partie de $A$, on a $A \cap E = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$.

## 7 Propriétés liées à la différence

Les égalités du **théorème 16** ne sont pas à connaître par cœur mais il est très simple de les retrouver par le calcul ensembliste.

**Théorème 16**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ A-\varnothing = A \qquad 2)\ E-A=\overline{A} \qquad 3)\ A-B = A-(A\cap B)\,.$$

**Preuve**

1) $A-\varnothing = A\cap\overline{\varnothing} = A\cap E = A$

2) $E-A = E\cap\overline{A} = \overline{A}\,.$

3) $A-(A\cap B) = A\cap\overline{A\cap B} = A\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) = (A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}) = \varnothing\cup(A-B) = A-B\,.$ □

Le **théorème 17** fournit une méthode pour montrer une inclusion.
En effet, montrer l'inclusion $A\subset B$, c'est comme montrer que $A\cap\overline{B}=\varnothing$.

**Théorème 17**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$A\subset B \Leftrightarrow A-B=\varnothing\,.$$

**Preuve**

($\Rightarrow$) Supposons que $A\subset B$.
Alors $A\cap\overline{B}\subset B\cap\overline{B}$, soit $A\cap\overline{B}\subset\varnothing$.
L'inclusion $\varnothing\subset A\cap\overline{B}$ est toujours vraie.
($\Leftarrow$) Supposons que $A-B=\varnothing$.
Alors $(A\cap\overline{B})\cup B = B$, soit $A\cup B = B$, et donc (**théorème 14**), $A\subset B$. □

**Remarque**
Comme $A$ est une partie de $E$ et que l'ensemble vide est une partie de $A$, on a $A-E=\varnothing$ et $\varnothing - A = \varnothing$.

## 8 Propriétés liées à la différence symétrique

Il est bon pour tout futur capésien ou futur agrégé de connaître les propriétés de la différence symétrique. Nous en reparlerons dans le **chapitre 4** (structures algébriques).

**Théorème 18**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ A\Delta B = B\Delta A \qquad 2)\ A\Delta A=\varnothing \qquad 3)\ A\Delta E = \overline{A} \qquad 4)\ A\Delta\varnothing = A \qquad 5)\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C\,.$$

**Preuve**

1) $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) = (B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}) = B\Delta A\,.$

2) $A\Delta A = (A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{A}) = \varnothing\cup\varnothing=\varnothing\,.$

3) $A\Delta E = (A\cap\overline{E})\cup(E\cap\overline{A}) = (A\cap\varnothing)\cup\overline{A} = \varnothing\cup\overline{A} = \overline{A}\,.$

4) $A\Delta\varnothing = (A\cap\overline{\varnothing})\cup(\varnothing\cap\overline{A}) = (A\cap E)\cup\varnothing = A\,.$

5) Cette égalité à établir est plus délicate si on s'autorise uniquement les opérations élémentaires sur les ensembles.

Une autre démonstration utilisant les fonctions caractéristiques est proposée en exercice dans le **chapitre 3**.

On a : 
$$\begin{aligned} A\Delta(B\Delta C) = (A\cap\overline{(B\Delta C)})\cup((B\Delta C)\cap\overline{A}) &= \left[A\cap(\overline{(B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})})\right]\cup\left[((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))\cap\overline{A}\right] \\ &= \left[A\cap(\overline{B\cap\overline{C}})\cap(\overline{C\cap\overline{B}})\right]\cup\left[(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\right] \\ &= \left[A\cap(\overline{B}\cup C)\cap(\overline{C}\cup B)\right]\cup\left[(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\right]. \end{aligned}$$

Or, $(\overline{B}\cup C)\cap(\overline{C}\cup B) = ((\overline{B}\cup C)\cap\overline{C})\cup((\overline{B}\cup C)\cap B) = (\overline{C}\cap\overline{B})\cup(B\cap C)\,.$

Ainsi, l'ensemble $A\Delta(B\Delta C)$ vaut :

$$\left[(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\right]\cup\left[(B\cap\overline{C}\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\right].$$

Les rôles des ensembles $A$, $B$ et $C$ étant symétriques, on a en particulier $A\Delta(B\Delta C) = C\Delta(A\Delta B)\,.$

Enfin, comme la différence symétrique est commutative, on conclut que $A\Delta(B\Delta C) = C\Delta(A\Delta B) = (A\Delta B)\Delta C\,.$ □

## 9 Deux égalités utiles

Nous terminons ce chapitre par deux égalités très utiles en pratique. Il est important de les retenir car ils permettent à partir d'un ensemble d'établir une égalité avec un autre ensemble que celui de départ.

**Théorème 19**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

$$1)\ \ A \cup (A \cap B) = A \qquad 2)\ \ A \cap (A \cup B) = A\,.$$

**Preuve**

1) L'inclusion $A \subset A \cup (A \cap B)$ est toujours vraie.

Puis, comme $A \cap B \subset A$, on a $(A \cap B) \cup A \subset A \cup A$, c'est-à-dire $(A \cap B) \cup A \subset A$.

On vous laisse le soin de faire une démonstration de la deuxième égalité.

2) On peut au choix faire comme en 1) ou utiliser une loi de De Morgan en considérant les complémentaires. □

# Les exercices du chapitre 1

**1 Attention aux notations**

Soit $E$ l'ensemble défini par l'égalité $E = \{1,\ 2,\ 3\}$.

Dire si chaque énoncé est vrai ou faux. Commentez chaque réponse.

1) $3 \in E$ 2) $\{2\} \in E$ 3) $2 \subset E$ 4) $\{1\} \subset E$ 5) $\varnothing \in E$

6) $E \in E$ 7) $\varnothing \subset E$ 8) $E \in \{E\}$ 9) $\{E\} \subset E$ 10) $E \subset \{E\}$

11) $E = \{3, 2, 1\}$ 12) $E = \{1, \{2, 3\}\}$ .

**2 Inclusion d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A - C \subset B - C \end{cases} \Leftrightarrow A \subset B\,.$$

**3 Opérations sur les ensembles**

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $C = \{2,\ 4,\ 6\}$, $D = \{3,\ 6\}$.

1) Déterminer en extension les ensembles $B \cap D$ et $C \cap D$.

2) Déterminer en extension les ensembles $B \cup C$ et $C \cup D$.

3) Déterminer en extension l'ensemble $C \Delta D$ .

4) Déterminer les complémentaires dans $A$ de $B$, $C$ et $D$.

**4 Ensembles des parties d'un ensemble**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides.

Montrer que :

1) $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$ .

2) a) $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$ .

b) Exhiber deux ensembles $E$ et $F$ tels que l'inclusion précédente soit stricte.

**5 Ensembles des parties d'un ensemble**

Déterminer en extension les ensembles suivants :

1) $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ 2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$ 3) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$ .

**6 Opérations sur les ensembles**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$ .

2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ .

3) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ .

4) $(A - B) \cap C = (A - B) - (A - C)$ .

5) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$ .

**7 Egalités d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$ .

2) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ .

**8 Egalité d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

On note :

$X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ et $Y = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

Monter que $X = Y$ .

**9 Propriétés de la différence**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $\overline{A} - \overline{B} = B - A$ 2) $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$ .

**10 Propriétés de la différence symétrique**

Soient $A$, $B$ et $C$ des parties d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$ 2) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

3) $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$ .

**11 Réunion et intersection**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

A quelle(s) condition(s) a-t-on :

$$A \cup B = A \cap B \ ?$$

**12 Propriétés de la différence symétrique**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$ 2) $A \Delta B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ .

**13 Réunion et différence**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

A quelle(s) condition(s) a-t-on :

$$A \cup B = A - B \ ?$$

**14 Propriétés de la différence symétrique**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \Delta B = B - A\,.$$

**15 Complémentaire d'un ensemble**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.

A quelle(s) condition(s) a-t-on :

$$A = \overline{A} \ ?$$

**16 Réunion et intersection**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Dire si les implications suivantes sont vraies.

1) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$ 2) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$ .

**17 ⋆ Opérations sur les ensembles**

Soient $E$ un ensemble et $\mathit{\Gamma}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ .

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall A, B \in \mathit{\Gamma}, (A \Delta B \in \mathit{\Gamma} \textit{ et } A \cap B \in \mathit{\Gamma})$ ;

(ii) $\forall A, B \in \mathit{\Gamma}, (A \Delta B \in \mathit{\Gamma} \textit{ et } A \cup B \in \mathit{\Gamma})$ ;

(iii) $\forall A, B \in \mathit{\Gamma}, (A \cup B \in \mathit{\Gamma} \textit{ et } A - B \in \mathit{\Gamma})$ .

**18 Inclusions d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C\,.$$

**19 Opérations sur les ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$ .

2) $A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C)$ .

**20 ⋆ Opérations sur les ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

On note $A * B = \overline{A \cup B}$ .

Montrer que les opérations élémentaires s'obtiennent en utilisant seulement « $*$ » et les ensembles $A$ et $B$.

# Les exercices du chapitre 1

**21** **Egalité d'ensembles**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$A \cap B = C \cap D \Rightarrow (A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B \cap D)) = A.$$

**22** **Egalité d'ensembles**

Soient $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$ et $Z'$ des parties d'un même ensemble $E$.

On suppose que :

- $X \cup Y \cup Z = E$ ;
- $X \cap Y = X' \cap Y'$, $X \cap Z = X' \cap Z'$ et $Y \cap Z = Y' \cap Z'$ ;
- $X \subset X'$, $Y \subset Y'$ et $Z \subset Z'$.

Montrer alors que $X = X'$, $Y = Y'$ et $Z = Z'$.

**23** **Inclusion d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}).$$

**24** **Egalités d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1) Montrer que :

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Rightarrow B = C.$$

2) En déduire que :

$$\begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \varnothing \end{cases} \Rightarrow A = \overline{B}.$$

**25** **Egalités d'ensembles**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

On suppose que :

$$A \subset C, \quad B \subset D, \quad C \cap D = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup B = C \cup D.$$

Montrer que $C = A$ et $D = B$.

*D'après lycée Louis-Le-Grand.*

**26** **Equation d'ensembles**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes d'inconnue $X$ :

1) $A \cup X = E$ 2) $A \cup X = A$.

**27** **Equation d'ensembles**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes d'inconnue $X$ :

1) $A \cap X = A$ 2) $A \cap X = \varnothing$.

**28** ★ **Equation d'ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation suivante d'inconnue $X$ :

$$A \cup X = B.$$

**29** ★ **Equation d'ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation suivante d'inconnue $X$ :

$$A \cap X = B.$$

**30** **Equation d'ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes d'inconnue $X$ :

1) $A - X = B$ 2) $A \Delta X = B$.

**31** **Equation d'ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1) Montrer que :

$$A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing.$$

2) En déduire les solutions dans $\mathcal{P}(E)$ de l'équation d'inconnue $X$ :

$$(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing.$$

**32** **Propriétés de la différence symétrique**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $A \subset B \cup (A \Delta B)$ 2) $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.

**33** **Egalités d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \Rightarrow A = B = C.$$

**34** **Inclusion d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \subset (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap C).$$

**35** **Opérations sur les ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Simplifier au maximum les écritures suivantes.

1) $(A \cup (A \cap B)) \cap B$ 2) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ 3) $\overline{A \cup B} \cap (C \cup \overline{A})$

4) $((A \cup B) \cap (B \cap C)) \cup (A \cup C)$ 5) $(A \cup B) \cap ((B \cap C) \cup (A \cup C))$.

**36** **Inclusion d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

1) Montrer que :

$$(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C).$$

2) Etablir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si $A$ est une partie de $C$.

**37** **Egalité d'ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

$$\overline{A} \subset B \Leftrightarrow A \cup B = E.$$

**38** **Opérations sur les ensembles**

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Simplifier au maximum les écritures suivantes.

1) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

2) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

**39** **Egalités d'ensembles**

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.

Montrer que :

1) $(A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$.

2) $(A \cup C) \cap (A \cup B) \cap (B \cup \overline{C}) = (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C})$.

# Problèmes du chapitre 1

Le but de ces trois problèmes est de résoudre des équations dans l'ensemble des parties d'un ensemble.
Le premier problème traite d'une équation qui généralise l'équation de l'**exercice 28**.
Le deuxième problème traite d'une équation qui généralise l'équation de l'**exercice 29**.
Le dernier problème traite d'une équation qui généralise l'équation de l'**exercice 31**.

## Problème I ★ Première équation

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, l'équation d'inconnue $(X,Y)$ :

$$X \cup Y = A\,.$$

1) Montrer que pour tout couple $(R,S)$ de sous-ensembles de $E$, les ensembles $X$ et $Y$ définis par les égalités :

$$X = A \cap (R \cup \overline{S}) \quad \text{et} \quad Y = A \cap (\overline{R} \cup S)\,,$$

vérifient l'égalité $X \cup Y = A$.

2) Montrer que, réciproquement, une solution $(X,Y)$ vérifiant $X \cup Y = A$, alors il existe un couple $(R,S)$ de sous-ensembles $E$ tel que :

$$X = A \cap (R \cup \overline{S}) \quad \text{et} \quad Y = A \cap (\overline{R} \cup S)\,.$$

3) Conclure.

## Problème II ★ Deuxième équation

Soit $A$ un sous-ensemble d'un ensemble $E$.
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, l'équation d'inconnue $(X,Y)$ :

$$X \cap Y = A\,.$$

1) Montrer que pour tout couple $(R,S)$ de sous-ensembles de $E$, les ensembles $X$ et $Y$ définis par les égalités :

$$X = A \cup (R \cap \overline{S}) \quad \text{et} \quad Y = A \cup (\overline{R} \cap S)\,,$$

vérifient l'égalité $X \cap Y = A$.

2) Montrer que, réciproquement, une solution $(X,Y)$ vérifiant $X \cap Y = A$, alors il existe un couple $(R,S)$ de sous-ensembles $E$ tel que :

$$X = A \cup (R \cap \overline{S}) \quad \text{et} \quad Y = A \cup (\overline{R} \cap S)\,.$$

3) Conclure.

## Problème III ★★ Troisième équation

Soient $A$, $B$ et $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$.
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, l'équation d'inconnue $X$ :

$$(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = C\,.$$

Soit $X_0$ une solution de cette équation.

1) Montrer que :

$$A \cap B \subset C \subset A \cup B\,.$$

2) Montrer que :

$$(\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup [X_0 \cap ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))] = X_0\,.$$

On suppose désormais que $A \cap B \subset C \subset A \cup B$.
Le sous-ensemble $D$ étant une partie de $E$, on pose :

$$X = (\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup [D \cap ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))]\,.$$

3) Montrer que :

a) $A \cap X = C \cap (\overline{B} \cup (D \cap A \cap B))$ b) $\overline{B} \cup X = \overline{B} \cup (B \cap \overline{C}) \cup (D \cap A \cap B)$ c) $B \cap \overline{X} = C \cap (\overline{A} \cup (\overline{D} \cap B))$.

4) En déduire une expression simple de l'ensemble $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X})$.

5) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les ensembles $A$, $B$ et $C$, pour que l'équation d'origine ait au moins une solution dans $\mathcal{P}(E)$.

6) Conclure.