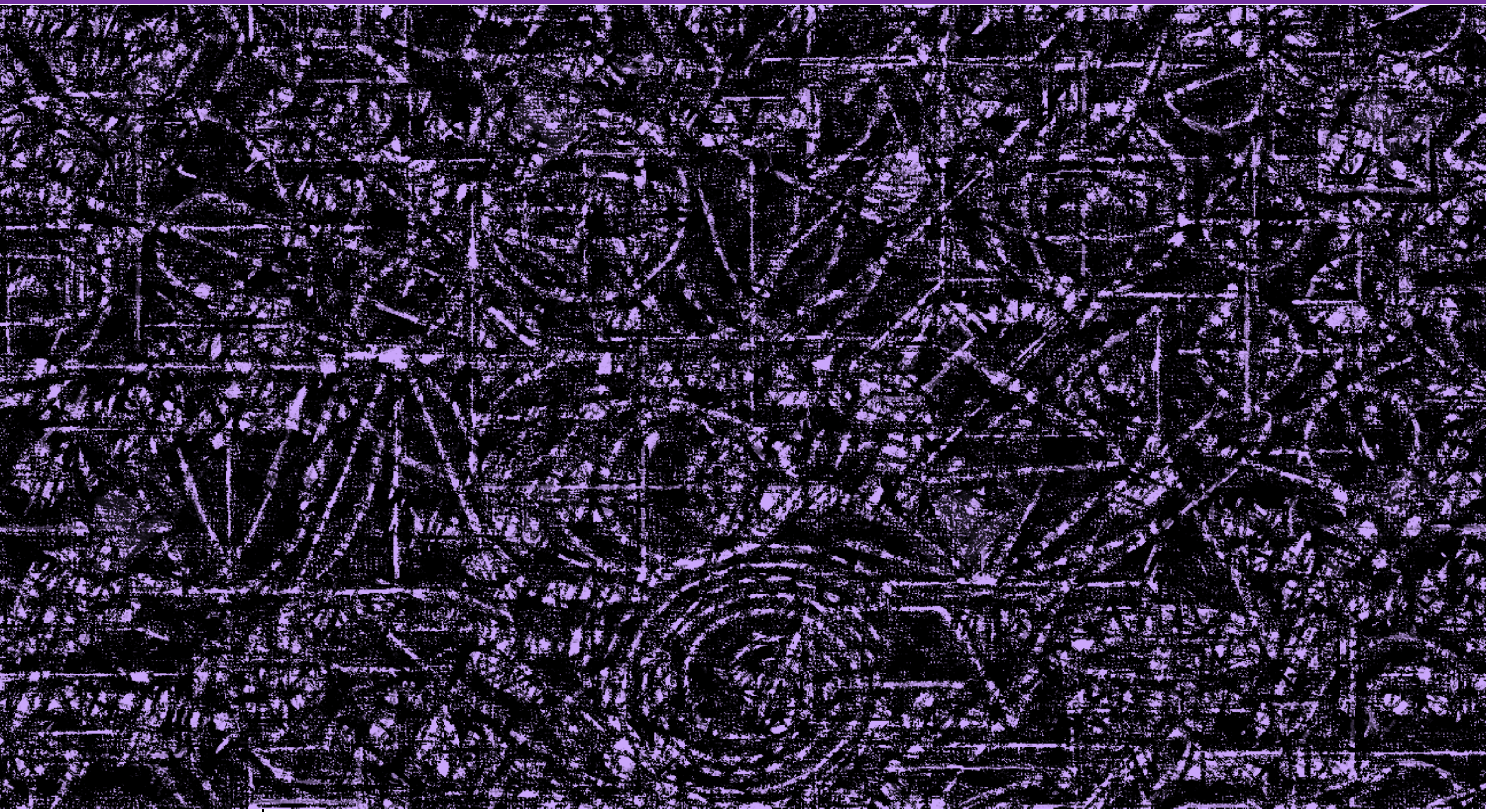
Théorie des cardinaux

1



Introduction

Jusqu'ici, on se contentait de dire que le cardinal d'un ensemble est son nombre d'éléments. Dans ce chapitre, nous nous proposons de définir rigoureusement cette notion.
Beaucoup de démonstrations dans ce chapitre son difficiles en plus d'être indigestes.

Prérequis

- Relations (**chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1)
- Fonctions et applications (**chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1)
- Axiomatisation de $\mathbb{N}$ (**chapitre 7** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Introduire la notion d'**équipotence**
- Définir la notion de **cardinal**
- Caractériser les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$
- Etudier les propriétés des cardinaux (réunion, produit cartésien...)
- Démontrer la **formule du crible**

La formule du crible et très lourde à établir.

Le cours du chapitre 1

1 Généralités

A Equipotence

Ne pas confondre l'équipotence avec la notion d'*équipollence* qui elle sera vue en géométrie !

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.
Dire que l'ensemble E est **équipotent** à l'ensemble F signifie qu'il existe une bijection de E vers F.

Remarque

Pour signifier que l'ensemble E est équipotent à l'ensemble F, on écrit : $E \simeq F$.

Exemples

1. L'ensemble $\{0, 1, 2\}$ est équipotent à l'ensemble $\{4, 5, 6\}$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N}^*$.
3. L'ensemble $\varnothing$ est équipotent à l'ensemble $\varnothing$.

Il suffit de considérer l'application : $\begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \mapsto n+1 \end{array}$.

Théorème 1

La relation « être équipotent à » est une relation d'équivalence.

Attention ! Sachant qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, ce n'est qu'abusivement qu'une telle relation est qualifiée ainsi.

Preuve

Soient E, F et G trois ensembles.

Réflexivité

L'application Id_E est toujours une bijection de E vers E, donc $\simeq$ est réflexive.

Symétrie

La symétrie nous permettra de dire que les ensembles E et F sont équipotents sans ambiguïté sur l'ordre.

Supposons que E est équipotent à F.
Il existe alors par définition une bijection f de E vers F.
Il est connu que l'application réciproque de f est aussi une bijection de F vers E.
Ainsi, F est équipotent à E et $\simeq$ est symétrique.

Application du **théorème 18** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

Transitivité

Supposons que E est équipotent à F et que F est équipotent à G.
Il existe alors par définition deux applications f et g respectivement de E vers F et de F vers G.
Il est connu que l'application composée $g \circ f$ est une bijection de E vers G.
Donc E est équipotent à G et $\simeq$ est transitive. □

Application du **théorème 16** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

B Ensembles finis

Nous noterons $\mathbb{N}_0 = \varnothing$ et pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{N}_n = \{1, ..., n\}$ l'ensembles des entiers naturels compris entre 1 et n.
Nous pouvons maintenant donner une définition rigoureuse de la notion d'ensemble fini.

Ainsi, $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$.
On rencontre aussi la notation $[\![1, n]\!]$.

Définition 2

Soit E un ensemble.
Dire que l'ensemble E est **fini**, signifie qu'il existe un entier naturel n tel que E soit équipotent à $\mathbb{N}_n$.

Remarques

1. L'ensemble vide est fini puisqu'il est équipotent à lui-même.
2. Un ensemble qui n'est pas fini sera dit **infini**.

Théorème 2

Soient E et F deux ensembles.
Si E et F sont équipotents avec E fini, alors F est fini.

Le **théorème 2** évident permet de « transmettre » la finitude sur les ensembles équipotents à un ensemble fini.

Preuve

Soit E un ensemble fini et F un ensemble équipotent à E.
Puisque E est fini, il existe un entier naturel n tel que $E \simeq \mathbb{N}_n$.
Puis, comme $E \simeq F$, on a par symétrie et transitivité de la relation $\simeq$, $F \simeq \mathbb{N}_n$. □

La preuve peut être résumé avec le diagramme suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{N}_n \\ F \arrow[ur, "f \circ g^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Le cours du chapitre 1

2 Cardinal d'un ensemble fini

A Lemmes préliminaires

Le théorème suivant est délicat à démontrer :

Théorème 3

Soient n et m deux entiers naturels.
Il existe une injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ si et seulement si $n \leqslant m$.

Preuve

Le cas où l'un des entiers n et m est nul est facile à traiter. On considère alors que les entiers n et m sont non nuls.
($\Leftarrow$) Supposons que $n \leqslant m$.

On a $\mathbb{N}_m = \mathbb{N}_n \cup \{n+1, \dots, m\}$.

Il est alors clair que $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_m$ et il suffit ensuite de considérer l'injection canonique de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$ (qui est donc bien une injection).

($\Rightarrow$) Effectuons une récurrence sur n avec p fixé dans $\mathbb{N}^*$.

Le lecteur prouvera facilement que toute application dont l'ensemble de départ est un singleton est injective.

Lorsque $n = 1$, toute application de $\mathbb{N}_1$ dans $\mathbb{N}_m$ est injective et on a bien $1 \leqslant m$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que s'il existe une injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$, alors $n \leqslant m$.

Considérons alors une injection f de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $\mathbb{N}_m$.

Remarquions déjà qu'il est clair que $\mathbb{N}_{n+1}$ n'est pas un singleton (puisque sinon n serait nul) et puisque f est injective, il vient que $m \geqslant 2$.

Cela assurera que $m - 1 \geqslant 1$ (nécessaire pour la suite).

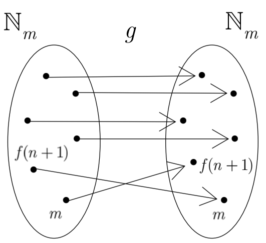
Considérons maintenant deux cas.

- Supposons que $f(n+1) = m$; alors par l'injectivité de f, on a $f\langle \mathbb{N}_n \rangle \subset \mathbb{N}_{m-1}$ et alors l'application induite $f|_{\mathbb{N}_n}^{\mathbb{N}_{m-1}}$ est encore une injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_{m-1}$.

Utilisation de l'**exercice 2**.

En appliquant donc l'hypothèse de récurrence, il vient que $n \leqslant m-1$ soit $n+1 \leqslant m$.

- Supposons que $f(n+1) < m$; considérons alors l'application $g : \mathbb{N}_m \longrightarrow \mathbb{N}_m$ définie par :



$$\begin{cases} g(m) = f(n+1) \\ g(f(n+1)) = m \\ \forall k \in \mathbb{N}_m \setminus \{m, f(n+1)\}, g(k) = k \end{cases} .$$

L'application g est bijective car c'est clairement une involution.

Puis, l'application $g \circ f$ de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $\mathbb{N}_m$ est une injection (en tant que composée de deux injections) qui vérifie l'égalité $g(f(n+1)) = m$.

D'après le premier cas étudié, il vient que $n+1 \leqslant m$.

Finalement, dans tous les cas, on a $n+1 \leqslant m$. □

Théorème 4

Soient n et m deux entiers naturels.
Il existe une surjection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ si et seulement si $m \leqslant n$.

Preuve

Ainsi, les ensembles $\mathbb{N}_n$ et $\mathbb{N}_m$ ne sont pas vides.

Le cas où l'un des entiers n et m est nul est facile à traiter. On considère alors que les entiers n et m sont non nuls.
On peut schématiser la démonstration via les équivalences suivantes :

Utilisation du **théorème 3** et du **théorème 35** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

Il existe une surjection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ $\Leftrightarrow$ Il existe une injection de $\mathbb{N}_m$ sur $\mathbb{N}_n$ $\Leftrightarrow$ $m \leqslant n$. □

Théorème 5

Soient n et m deux entiers naturels.
Il existe une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ si et seulement si $n = m$.

Preuve

On peut schématiser la démonstration via les équivalences suivantes :

Utilisation des **théorèmes 3** et **4**.

Il existe une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe une injection de } \mathbb{N}_n \text{ sur } \mathbb{N}_m \\ \text{Il existe une surjection de } \mathbb{N}_n \text{ sur } \mathbb{N}_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leqslant m \\ m \leqslant n \end{cases} \Leftrightarrow n = m$. □

Le cours du chapitre 1

B Cardinal d'un ensemble fini

On est maintenant en mesure de définir rigoureusement le cardinal d'un ensemble fini. Commençons d'abord par le théorème suivant :

Théorème 6

Soit E un ensemble fini.
Il existe un unique entier naturel n tel que E soit équipotent à $\mathbb{N}_n$.

La preuve peut être résumé avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{N}_n \\ \mathbb{N}_m \arrow[ur, "f \circ g^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve

L'existence est évidente via la **définition 2**.
Soit n et m deux entiers naturels tels que $E \simeq \mathbb{N}_n$ et $E \simeq \mathbb{N}_m$.

Alors, par symétrie de la relation $\simeq$, on a $\mathbb{N}_n \simeq E$ et par transitivité, $\mathbb{N}_n \simeq \mathbb{N}_m$.

D'après le **théorème 5**, il vient que $n = m$. □

La **définition 3** est fondamentale pour la suite du cours.

Définition 3

Soit E un ensemble fini.
L'unique entier naturel n tel que E soit équipotent à $\mathbb{N}_n$ est appelé le **cardinal** de E.

Remarques

Ainsi, $\mathrm{Card}(E) \geqslant 0$.

1. Le cardinal de E se note généralement $\mathrm{Card}(E)$.

2. Il est clair que $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

3. En vertu du **théorème 2** et de l'unicité du cardinal, pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini, il est intéressant de le rendre équipotent à un ensemble fini dont on connaît le cardinal.

Voir l'**exercice 1** pour un exemple.

4. Soit E un ensemble fini et non vide.
On sait alors qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathbb{N}_n$ soit équipotent à E.

Notons donc f une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans E.

Pour tout i de $\{1, ..., n\}$, notons aussi $x_i = f(i)$.

Comme f est injective, les éléments $x_1, ..., x_n$ sont deux à deux distincts.

Puis, comme f est surjective, $E = \{x_1, ..., x_n\}$.

Cette notation de l'ensemble est très pratique dans les exercices.

Théorème 7

Soient E et F deux ensembles finis.
Il existe une injection de E sur F si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

La preuve de la première implication peut être résumé avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{N}_n \arrow[d, "g \circ i \circ f^{-1}"] \\ F \arrow[r, "g"'] & \mathbb{N}_m \end{tikzcd}$$

Preuve

Puisque les ensembles E et F sont finis, il existe deux entiers naturels n et m tels que $E \simeq \mathbb{N}_n$ et $F \simeq \mathbb{N}_m$.

Notons $f : E \longrightarrow \mathbb{N}_n$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{N}_m$ deux bijections (on sait alors que $\mathrm{Card}(E) = n$ et $\mathrm{Card}(F) = m$).

($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe une injection i de E sur F.

L'application $g \circ i \circ f^{-1}$ est une injection (en tant que composée de trois injections) de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$.

En appliquant le **théorème 3**, il vient que $n \leqslant m$ c'est-à-dire que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

La preuve de la seconde implication peut être résumé avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g^{-1} \circ j \circ f"'] & \mathbb{N}_n \arrow[d, "j"] \\ F \arrow[r, "g"'] & \mathbb{N}_m \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

Alors $n \leqslant m$ et en appliquant le **théorème 3**, il existe une injection j de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$.

L'application $g^{-1} \circ j \circ f$ est une injection (en tant que composée de trois injections) de E sur F. □

Théorème 8

Soient E et F deux ensembles finis.
Il existe une surjection de E sur F si et seulement si $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

Preuve

Si E ou F est vide, le résultat est évident. On considère désormais que E et F sont non vides.
On peut schématiser la démonstration via les équivalences suivantes :

$$\text{Il existe une surjection de } E \text{ sur } F \Leftrightarrow \text{Il existe une injection de } F \text{ sur } E \Leftrightarrow \mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F) .$$ □

Théorème 9

Soient E et F deux ensembles finis.
Il existe une bijection de E sur F si et seulement si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Preuve

Si E ou F est vide, le résultat est évident. On considère désormais que E et F sont non vides.
On peut schématiser la démonstration via les équivalences suivantes :

$$\text{Il existe une bijection de } E \text{ sur } F \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Il existe une injection de } E \text{ sur } F \\ \text{Il existe une surjection de } E \text{ sur } F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F) \\ \text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \text{Card}(E) = \text{Card}(F).$$ □

3 Parties finies de l'ensembles des entiers naturels

Quels sont les parties finies de $\mathbb{N}$? Voici la réponse :

A Caractérisation des parties finies de N

Le **théorème 10** est très important.

Théorème 10 Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$

Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

La preuve, lourde, peut être omise en première lecture.

Preuve

($\Rightarrow$) Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$.

L'ensemble vide est majoré par tout entier naturel.

- Si A est vide, alors il est majoré.
- Sinon, A n'est pas vide et il existe alors un entier naturel n non nul tel que $\mathbb{N}_n \simeq A$.

On va montrer par récurrence (sur n) que A est majoré.
Notons $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow A$ une bijection.
Quand $n = 1$, l'ensemble A est réduit à un singleton avec $A = \{f(1)\}$.
L'ensemble A est ainsi majoré par $f(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'une partie non vide de $\mathbb{N}$ de cardinal n, soit majoré.
Considérons alors une partie B non vide de $\mathbb{N}$ de cardinal $n+1$.

Les éléments $g(1), \ldots, g(n+1)$ sont deux à deux distincts.

Il existe une bijection de g de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur B et alors $B = \{g(1), \ldots, g(n+1)\} = \{g(1), \ldots, g(n)\} \cup \{g(n+1)\}$.
D'après l'hypothèse de récurrence (et de l'**exercice 2**), l'ensemble $\{g(1), \ldots, g(n)\}$ est fini de cardinal n. Donc cet ensemble est majoré par un entier naturel M.
De plus, l'ensemble $\{g(n+1)\}$ est clairement majoré par $g(n+1)$.
La relation usuelle $\leqslant$ étant totale dans $\mathbb{N}$, l'ensemble B est majoré par $\max\{M, g(n+1)\}$.

($\Leftarrow$) Soit A une partie majorée de $\mathbb{N}$.
- Si A est vide, alors il est fini.

On rappelle que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

- Sinon, A admet un plus grand élément.

Effectuons alors une <u>récurrence forte</u> sur l'entier naturel p pour la propriété :

« Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ de plus grand élément p est finie ».

On a $\{0\} \simeq \mathbb{N}_1$.

Quand $p = 0$, alors la partie A est réduit au singleton $\{0\}$ qui est clairement fini.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ de plus grand élément inférieur ou égal à p soit finie.
Considérons une partie non vide B de $\mathbb{N}$ de plus grand élément $p+1$.
Considérons le sous-ensemble $B \setminus \{p+1\}$.

En effet, on a dans ce cas l'inclusion $B \subset \{p+1\}$ qui oblige B à être réduit à un singleton puisqu'il n'est pas vide (voir le **théorème 14**).

Si cette partie est vide, c'est gagné. Sinon, puisqu'elle est majorée, elle admet un plus grand élément inférieur ou égal à p. L'application de l'hypothèse de récurrence montre que l'ensemble $B \setminus \{p+1\}$ est fini.
Enfin, en notant C l'ensemble $B \setminus \{p+1\}$, il vient que $B = C \cup \{p+1\}$, puis, (voir l'**exercice 3**), comme $p+1 \notin C$, l'ensemble B est fini. □

B Conséquences

Le **théorème 11** dit tout simplement que toute partie d'un ensemble fini est finie (quand ces parties sont des sous-ensembles de $\mathbb{N}$).

Théorème 11

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
Si $A \subset B$ et si l'ensemble B est fini, alors l'ensemble A est fini.

Le lecteur pourra-t-il le (re)démontrer rapidement (on ne parle pas du **théorème 10** mais de l'affirmation qui suit) ?

Preuve

Supposons que A est un sous-ensemble de B avec B fini.
D'après le **théorème 10**, B est majoré et alors il en est de même pour A.
En utilisant à nouveau le **théorème 10**, il vient que A est fini. □

Le **théorème 12** dit simplement que l'intersection de deux ensembles finis et finie (dans $\mathbb{N}$).

Théorème 12

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
Si les ensembles A et B sont finis, alors l'ensemble $A \cap B$ est fini.

Preuve

Supposons que les ensembles A et B sont finis.
Comme $A \cap B \subset A$, il suffit d'appliquer le **théorème 11**. □

Le **théorème 13** dit simplement que la réunion de deux ensembles finis et finie (dans $\mathbb{N}$).

Théorème 13

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
Si les ensembles A et B sont finis, alors l'ensemble $A \cup B$ est fini.

Preuve

Supposons que les ensembles A et B sont finis.
Ces ensembles (**théorème 10**) sont respectivement majorés par M et M'.
En notant $M_0 = \max\{M, M'\}$, il est clair que $A \cup B$ est majoré par M_0 et donc est fini. □

4 Propriétés des cardinaux

Toutes les propriétés des cardinaux sont fondamentales pour la suite des chapitres de cet ebook.

A Inclusion et cardinalité

Le **théorème 14** est très important. Il a de très nombreuses conséquences. Ce théorème dit en particulier qu'une partie d'un ensemble fini est finie. Il généralise donc le **théorème 11**.

Théorème 14 Sous-ensemble d'un ensemble fini

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E.
Si l'ensemble E est fini, alors l'ensemble A est fini et $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$.

Preuve

Supposons que E est un ensemble fini.
Si A est vide le résultat annoncé est évident.
Supposons alors que A est non vide.
Comme E est fini, il existe une application f et un entier naturel n tels que $f : E \longrightarrow \mathbb{N}_n$ est une bijection.
L'application induite de A sur $g\langle A\rangle$ est clairement une bijection.
Mais $g\langle A\rangle \subset \mathbb{N}_n$, donc d'après le **théorème 11**, l'ensemble $g\langle A\rangle$ est fini et ainsi (**théorème 2**) A est fini.
Il existe un entier naturel m et une application g tels que $g : A \longrightarrow \mathbb{N}_m$ est une bijection.
Notons enfin i l'injection canonique de A sur E.
L'application $f \circ i \circ g^{-1}$ est une injection (composée de trois injections) de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$.
Il vient alors (**théorème 3**) que $m \leqslant n$, c'est-à-dire $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$. □

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & \mathbb{N}_n \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{N}_m \arrow[u, "f \circ i \circ g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Le **théorème 15** est très important.

Théorème 15

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E.
Si l'ensemble E est fini, alors l'ensemble A est fini et si $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ alors $A = E$.

Attention à ne pas oublier l'hypothèse « $A \subset E$ » !

Preuve

Reprenons toutes les notations de la démonstration précédente.
Supposons que E est un ensemble fini.
Alors, on sait d'après le théorème précédent que A est fini.
Supposons de plus que $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ (donc que $m = n$).
Alors l'application (qu'on notera h) $f \circ i \circ g^{-1}$ de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$ vu précédemment est bijective (**exercice 9**).
Enfin, comme $i = f^{-1} \circ h \circ g$, l'application i est bijective et donc $A = E$. □

En effet puisque $E \subset A$ dans ce cas.

Le cours du chapitre 1

Remarque

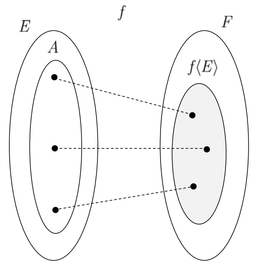
De ce qui précède, quand A est un sous-ensemble strict de E (E étant fini), on a $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(E)$.

B Applications et cardinalité

Théorème 16

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Si l'ensemble E est fini, alors l'ensemble $f\langle E\rangle$ est fini et $\mathrm{Card}(f\langle E\rangle) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.



Utilisation du **théorème 9**.

Preuve

Si E est vide, le résultat est évident.

Supposons que E est un ensemble fini et non vide.

Soit y un élément de $f\langle E\rangle$.

Notons x_y un des antécédents de y. Il est alors clair par définition de l'image directe que $x_y \in E$.

Notons A l'ensemble $\{x_y, y \in f\langle E\rangle\}$.

Puisque $A \subset E$ et que E est fini, on a (**théorème 15**) A fini et donc $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

Puis, l'application induite de A dans $f\langle E\rangle$ est bijective et donc $f\langle E\rangle$ est fini et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(f\langle E\rangle)$.

Il vient alors $\mathrm{Card}(f\langle E\rangle) \leqslant \mathrm{Card}(E)$. □

Théorème 17

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Si l'ensemble E est fini, alors l'ensemble $f\langle E\rangle$ est fini et f est injective si et seulement si $\mathrm{Card}(f\langle E\rangle) = \mathrm{Card}(E)$.

Preuve

Gardons les mêmes notations que la preuve précédente.

D'après la preuve précédente, on sait déjà que si E est fini, alors $f\langle E\rangle$ l'est aussi.

($\Rightarrow$) Supposons que f est injective.

Alors la corestriction $f|^{f\langle E\rangle}$ est aussi injective et donc (**théorème 7**) $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(f\langle E\rangle)$.

Puisqu'on sait déjà que $\mathrm{Card}(f\langle E\rangle) \leqslant \mathrm{Card}(E)$, il vient que $\mathrm{Card}(f\langle E\rangle) = \mathrm{Card}(E)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Card}(f\langle E\rangle) = \mathrm{Card}(E)$.

Utilisation du **théorème 15**.

Alors, $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$, soit, puisque A est inclus dans E, $A = E$.

L'application de A dans $f\langle E\rangle$ étant à la base une bijection, l'application de E dans $f\langle E\rangle$ l'est aussi.

En clair : f injective $\Leftrightarrow$ $f|^{f\langle E\rangle}$ injective.

Ainsi, f est injective. □

Le **théorème 18** est très important. Il permet de transmettre la finitude avec une injection seulement.

Théorème 18

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective.

Si l'ensemble F est fini, alors l'ensemble E est fini.

Preuve

Supposons que F est un ensemble fini.

Il suffit de remarquer que l'application de E vers $f\langle E\rangle$ est bijective avec $f\langle E\rangle$ fini (puisque $f\langle E\rangle \subset F$). □

Remarque

En effet, les ensembles E et $f\langle E\rangle$ sont équipotents.

Il est clair que si f est injective et que $f\langle E\rangle$ est fini, alors il en est de même pour E.

Théorème 19

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective.

Si l'ensemble E est fini, alors l'ensemble F est fini.

Preuve

L'un uniquement des deux ensembles ne peut pas être vide avec une surjection.

Le résultat est évident si les ensembles E et F sont vides. On les considère désormais non vides.

Supposons que l'ensemble E est fini.

Il existe une injection de F dans E et en utilisant le **théorème 18**, il vient que F est fini. □

Le cours du chapitre 1

Le **théorème 20** fait partie des théorèmes le plus important de ce chapitre. Son utilisation est courante. Il est surtout utilisé quand $E = F$.

Théorème 20

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective.

Preuve

Le résultat est évident si les ensembles E et F sont vides. On les considère désormais non vides.

i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que f est injective.

On sait alors que l'application de E vers $f\langle E\rangle$ est bijective, donc $f\langle E\rangle$ est fini et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(f\langle E\rangle) = \mathrm{Card}(F)$.

Utilisation du **théorème 32** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I.

Puisque $f\langle E\rangle \subset F$, alors (**théorème 15**) $f\langle E\rangle = F$ et f est alors surjective.

ii) $\Rightarrow$ i) Supposons que f est surjective et notons n ($n \in \mathbb{N}^*$) le cardinal de E.

Raisonnement par l'absurde.

Si f n'est pas injective, il existe deux éléments x et x' de E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

La restriction $f|_{E\setminus\{x'\}}$ est clairement surjective et donc (**théorème 8**) $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E \setminus \{x'\})$.

Remarquez que nécessairement n est supérieur ou égal à 2.

Or, $\mathrm{Card}(E \setminus \{x'\}) = n-1$ et $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E) = n$, donc $n \leqslant n-1$, soit $0 \leqslant -1$ ce qui est absurde.

Ainsi, f est injective.

Les implications i) $\Rightarrow$ iii) , ii) $\Rightarrow$ iii) , iii) $\Rightarrow$ i) et iii) $\Rightarrow$ ii) se déduisent des deux premières implications. □

Remarque

Attention ! Le théorème précédent n'est pas nécessairement vrai pour des ensembles infinis.

L'application $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto 2n \end{array}$ est injective mais n'est pas surjective.

L'application $\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$ est surjective mais n'est pas injective.

C Opérations sur les ensembles et cardinalité

Le **théorème 21** est fondamental.

Théorème 21 Cardinal d'une réunion disjointe

Soient E et F deux ensembles disjoints.

Si E et F sont finis, alors $E \cup F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$.

Preuve

On exclut le cas où l'un des ensembles E et F est vide (résultat immédiat).

Admettons que les ensembles E et F soient finis et non vides.

Notons n et p ($n, p \in \mathbb{N}$) les cardinaux respectifs de E et F.

Il existe par ailleurs deux applications $f : E \longrightarrow \mathbb{N}_n$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{N}_p$ bijectives.

Considérons l'application $h : E \cup F \longrightarrow \mathbb{N}_{n+p}$ définie par :

L'application h est bien définie car pour tout x de E, $h(x) \in \mathbb{N}_n$ et pour tout x de F, $h(x) \in [\![n+1, n+p]\!]$.

$$\begin{cases} \forall x \in E, h(x) = f(x) \\ \forall x \in F, h(x) = g(x) + n \end{cases}.$$

On va montrer que l'application h est bijective.

- Soit x et x' deux éléments de $E \cup F$ tels que $h(x) = h(x')$.

Si $h(x) \in \mathbb{N}_n$, alors x et x' appartiennent à E et donc $f(x) = f(x')$, soit par injectivité de f, $x = x'$.

Si $h(x) \in [\![n+1, n+p]\!]$, alors x et x' appartiennent à F et donc $g(x) + n = g(x') + n$, soit $g(x) = g(x')$, soit encore par injectivité de g, $x = x'$.

Ainsi, h est injective.

- Soit y un élément de $[\![1, n+p]\!]$.

Si $y \in \mathbb{N}_n$, comme f est surjective, il existe un élément x de E tel que $y = f(x) = h(x)$.

Si $y \in [\![n+1, n+p]\!]$, alors $n+1 \leqslant y \leqslant n+p$, soit $1 \leqslant y-n \leqslant p$.

Puisque g est surjective, il existe alors un élément x de F tel que $y - n = g(x)$, soit $y = h(x)$.

Ainsi h est surjective.

Finalement, l'application h est bijective et l'ensemble $E \cup F$ est fini.

Puisque $\mathrm{Card}(\mathbb{N}_{n+p}) = n + p$, il vient que $\mathrm{Card}(A \cup B) = n + p = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$. □

Le cours du chapitre 1

Le **théorème 22** généralise le **théorème 21**.

Théorème 22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ des ensembles.

1) Si les ensembles $E_1, \dots, E_n$ sont finis, alors l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est fini.

2) Si les ensembles $E_1, \dots, E_n$ sont finis et deux à deux disjoints, alors $\displaystyle\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$.

Voir aussi les **exercices 10** et **11**.

Preuve

1) Récurrence sur n.
Quand $n = 1$, on trouve E_1 qui est bien fini.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour des ensembles finis $E_1, \dots, E_n$, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est fini.

Considérons les ensembles finis $E_1, \dots, E_{n+1}$.

On a : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1}$.

Cette dernière réunion est finie comme réunion de deux ensembles finis.
2) Récurrence sur n.
Le cas où $n = 1$ est trivial.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour $E_1, \dots, E_n$ finis et deux à deux disjoints on a $\displaystyle\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$.

Considérons les ensembles finis et deux à deux disjoints $E_1, \dots, E_{n+1}$.

On a :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \mathrm{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1}\right) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + \mathrm{Card}(E_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i) + \mathrm{Card}(E_{n+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{Card}(E_i). \qquad \square$$

Remarquez que :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap E_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap E_{n+1}) = \varnothing .$$

Cette dernière égalité permet d'appliquer le **théorème 22** (à la deuxième égalité ci-contre).

Le **théorème 23** est très important.

Théorème 23 **Cardinal d'une réunion**

Soient E et F deux ensembles.
Si les ensembles E et F sont finis, alors l'ensemble $E \cup F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F).$$

Remarquez que les ensembles E et F ne sont pas supposés disjoints.

Preuve

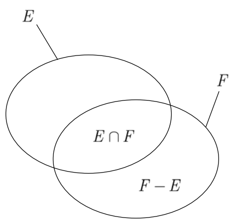
Supposons que les ensembles E et F sont finis.
On sait déjà par le **théorème 21**, que l'ensemble $E \cup F$ est fini.
Il est clair que $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ avec E et $F \setminus E$ disjoints, donc d'après le **théorème 21** :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E \cup (F \setminus E)) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F \setminus E).$$

Puis, comme $F = (E \cap F) \cup (F \setminus E)$ avec $E \cap F$ et $F \setminus E$ disjoints, on a :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) + \mathrm{Card}(E \cap F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F \setminus E) + \mathrm{Card}(E \cap F).$$

Ainsi, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$. $\square$



La formule du crible est aussi appelée *formule de Poincaré* (**Henri Poincaré** 1854-1912, était un mathématicien français).
Cette formule est due au mathématicien français **Abraham de Moivre** (1667-1754) et demande un très grand effort de mémorisation.

Théorème 24 **Formule du crible**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ des ensembles.

Si les ensembles $E_1, \dots, E_n$ sont finis, alors l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est fini et :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\right).$$

La puissance de -1 peut être $k-1$ aussi (il faut d'une manière générale ajouter k à un nombre impair positif).

Exemple

Testons cette formule quand $n=3$.

On a : $\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = +(\text{Card}(E_1)+\text{Card}(E_2)+\text{Card}(E_3))$
$\qquad -(\text{Card}(E_1\cap E_2)+\text{Card}(E_1\cap E_3)+\text{Card}(E_2\cap E_3))$
$\qquad +\text{Card}(E_1\cap E_2\cap E_3)$.

Ainsi, $\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \text{Card}(E_1)+\text{Card}(E_2)+\text{Card}(E_3)-\text{Card}(E_1\cap E_2)-\text{Card}(E_1\cap E_3)-\text{Card}(E_2\cap E_3)$
$+\text{Card}(E_1\cap E_2\cap E_3)$.

Remarque

La formule du crible peut aussi s'écrire :

C'est cette formule qui sera considérée dans la démonstration car elle est plus souple.

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right).$$

La preuve est très lourde.

Preuve

Récurrence sur n.

L'égalité est trivialement vérifiée avec $n=1$ (on trouve E_1 dans chaque membre de l'égalité).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que pour des ensembles finis $E_1,\dots,E_n$ on a :

On rappelle que pour $k\in\mathbb{N}$, la notation $\mathcal{P}_k$ désigne l'ensemble des parties d'un ensemble à k élément.
Par exemple, pour tout ensemble E, on a $\mathcal{P}_0(E)=\{\varnothing\}$.

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right).$$

Considérons les ensembles finis $E_1,\dots,E_{n+1}$.

$$\text{On a : }\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \text{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\cup E_{n+1}\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)+\text{Card}(E_{n+1})-\text{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\cap E_{n+1}\right)$$

Utilisation du **théorème 38** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

$$= \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)+\text{Card}(E_{n+1})-\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\cap E_{n+1})\right).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\text{Card}(E_{n+1})-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I}(E_i\cap E_{n+1})\right)$$

Cette partie (facile à comprendre avec un exemple) sera détaillée en vidéo.

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\text{Card}(E_{n+1})-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}_{k+1}(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\in J}}\text{Card}\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right)$$

Remarquer que : $-1\times(-1)^{k+1}=(-1)^{k+2}$.

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\text{Card}(E_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+2}\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}_{k+1}(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\in J}}\text{Card}\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right).$$

Avec un changement d'indice par translation ($l=k+1$), on a après retour à la variable k :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\text{Card}(E_{n+1})+\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\in J}}\text{Card}\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right).$$

Dans la dernière somme le terme d'indice 1 correspond à $\text{Card}(E_{n+1})$.

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\in J}}\text{Card}\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right)$$

Ajout artificiel de l'élément $n+1$ dans le premier terme (le terme associé est nul).

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\notin I}}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\in J}}\text{Card}\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right)$$

Remplacement de J par I et de j par i. En effet, ces variables sont muettes.

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\notin I}}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})\\ n+1\in I}}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$$

Linéarité de la somme.

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n+1\})}\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right).$$

□

D Produit cartésien et cardinalité

On pourrait faire autrement mais ce lemme formalise la notion de *choix successifs* qui sera précisé dans le chapitre suivant.

Le **lemme des bergers** permettra de démontrer le **théorème 25** relatif au cardinal d'un produit cartésien.

Ce théorème est nommé ainsi car il provient de la situation suivante : un berger ne voyant que les pattes de ses moutons, (ayant chacun 4 pattes) pourra déterminer le nombre total des moutons en divisant le nombre de pattes par 4.

Théorème 25 **Lemme des bergers**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective avec F un ensemble fini.

S'il existe un entier naturel n tel que pour tout y de F on a $\text{Card}(f^{-1}\langle\{y\}\rangle) = k$, alors l'ensemble E est fini et :

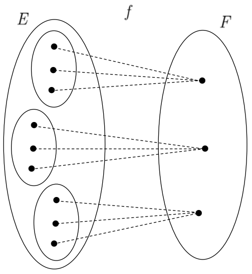
$$\text{Card}(E) = k\,\text{Card}(F)\,.$$

Preuve

Si F est vide, alors E l'est aussi et l'égalité devient vraie.

Si F n'est pas vide, E peut quand même l'être.

Si F n'est pas vide, notons n ($n \in \mathbb{N}^*$) le cardinal de F.



Notons, pour tout y appartenant à F, $E_y = f^{-1}\langle\{y\}\rangle$ et supposons qu'il existe un entier naturel n tel que pour tout y de F on a $\text{Card}(E_y) = k$.

D'après l'**exercice 28** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1, la famille $(E_y)_{y \in F}$ forme une partition de E. De plus, on sait que deux partitions distinctes sont nécessairement disjointes et que $\displaystyle\bigcup_{y \in F} E_y = E$.

Il vient alors que l'ensemble E est fini (car c'est une réunion finie d'ensembles finis) et (**théorème 22**) :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}\left(\bigcup_{y \in F} E_y\right) = \sum_{y \in F} \text{Card}(E_y) = \sum_{y \in F} k = k\,\text{Card}(F)\,. \qquad \square$$

Nous pouvons à présent démontrer le théorème suivant :

Le **théorème 26** est important.

Théorème 26 **Cardinal d'un produit cartésien**

Soient E et F deux ensembles.

Si les ensembles E et F sont finis, alors l'ensemble $E \times F$ et fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Preuve

Si l'un des deux ensembles E et F est vide, l'égalité est évidente. Supposons que les ensembles E et F sont non vides et finis.

Le lecteur pourra revoir la **définition 8** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

Considérons la 2ème projection canonique $\begin{array}{l} p : E \times F \longrightarrow F \\ \qquad (x, y) \mapsto y \end{array}$.

Commençons par remarquer que cette application est surjective (évident par construction).

Il est aussi clair que pour tout y de F, on a $p^{-1}\langle\{y\}\rangle = \{(x, y), x \in E\}$.

Pour y fixé dans F, l'application :
$$\begin{array}{l} E \times \{y\} \longrightarrow E \\ (x, y) \mapsto x \end{array}$$
est bijective et donc :
$$\begin{aligned} \text{Card}(E \times \{y\}) &= \text{Card}(p^{-1}\langle\{y\}\rangle) \\ &= \text{Card}(E)\,. \end{aligned}$$

Puis, pour tout y de F, l'ensemble $p^{-1}\langle\{y\}\rangle$ est fini et de cardinal celui égal à E.

En appliquant alors le **lemme des bergers**, l'ensemble $E \times F$ est fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$. $\square$

Le théorème suivant généralise le théorème précédent.

La démonstration du **théorème 27** est immédiate (par récurrence sur n) en n'oubliant pas que les ensembles :
$$\prod_{i=1}^{n} E_i \times E_{n+1} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n+1} E_i$$
ne sont pas toujours égaux mais équipotents (voir aussi l'**exercice 72** du **chapitre 3** du Algèbre Licence 1).

Théorème 27

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles.

Si les ensembles $E_1, \ldots, E_n$ sont finis, alors l'ensemble $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et $\displaystyle\text{Card}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i)$.

Remarque

Lorsque les ensembles $E_1, \ldots, E_n$ sont égaux, par exemple à E, on a $\displaystyle\text{Card}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \text{Card}(E^n) = (\text{Card}(E))^n$.

E Ensemble des applications entre deux ensembles et cardinalité

On rappelle que pour une application de E dans F, on note F^E l'ensemble des applications de E dans F. Comme on va le voir, cette notation est adaptée au calcul des cardinaux.

Le cours du chapitre 1

Le **théorème 28** est très important.

Théorème 28

Soient E et F deux ensembles.

Si les ensembles E et F sont finis, alors l'ensemble F^E est fini et $\mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)}$.

Afin d'étendre au maximum le **théorème 28**, nous allons jusqu'à affirmer que $0^0 = 1$, ce qui correspond au nombre d'applications de l'ensemble vers lui-même.
Le lecteur remarquera que si E n'est pas vide :
$E^{\varnothing} = \{\varnothing_E\}$, $\varnothing^A = \varnothing$, $\varnothing^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.

Preuve

Si E est vide, alors il y a qu'une seule application de E vers F et l'égalité devient cohérente.
Supposons que E n'est pas vide (donc F ne peut pas l'être pour garantir l'existence d'une application de E vers F) et notons n son cardinal ($n \in \mathbb{N}^*$).
Il existe alors des éléments $x_1, ..., x_n$ deux à deux distincts tels que $E = \{x_1, ..., x_n\}$.

On considère l'application $\begin{aligned} \varphi : F^E &\longrightarrow F^n \\ f &\mapsto (f(x_1), ..., f(x_n)) \end{aligned}$ et on va montrer qu'elle est bijective.

Soient f et g deux éléments de F^E tels que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

Utilisation de la définition de deux applications égales.

On a alors $(f(x_1), ..., f(x_n)) = (g(x_1), ..., g(x_n))$, soit pour tout i de $\{1, ..., n\}$, $f(x_i) = g(x_i)$, soit $f = g$.

L'application φ est par conséquent injective.

Soit Y un élément de F^n .
Il existe alors des éléments $y_1, ..., y_n$ de F tels que $Y = (y_1, ..., y_n)$.

On considère l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par : $\forall i \in \{1, ..., n\}, f(x_i) = y_i$.

Il existe alors une application g de F^E tel que $Y = \varphi(g)$ (f ci-dessus convient) et l'application φ est surjective.

Finalement, l'application φ est bijective, donc F^E est fini et :

Utilisation du **théorème 27**.

$$\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F^n) = (\mathrm{Card}(F))^n = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)} .$$
□

F Ensemble des parties d'un ensemble et cardinalité

Autrement dit, si l'ensemble des parties d'un ensemble est fini, alors cet ensemble est lui-même fini.

Théorème 29

Soit E un ensemble.
Si l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini, alors l'ensemble E est fini.

Preuve

Remarquons qu'il n'est pas possible que $\mathcal{P}(E)$ soit vide (même si E l'est).

Considérons l'application $\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ x &\mapsto \{x\} \end{aligned}$ et montrons qu'elle est injective.

Si E est vide, c'est immédiat.
Sinon, soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.

Alors $\{x\} = \{x'\}$, et comme $x \in \{x\}$, on a $x \in \{x'\}$, c'est-à-dire $x = x'$.

Supposons enfin que $\mathcal{P}(E)$ est fini.

Il vient alors, d'après le **théorème 18**, que E est fini. □

Une autre démonstration du **théorème 30** est démontrée dans l'**exercice 12** et encore une autre dans le chapitre suivant.

Théorème 30

Soit E un ensemble.

Si l'ensemble E est fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

Preuve

Le résultat est évident si E est vide. On considère que E est fini et non vide.

On considère l'application $\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \varphi_A \end{aligned}$ et montrons qu'elle est bijective.

On reconnait la notation φ_A pour désigner la fonction caractéristique de A.

Soient A et B deux sous-ensembles de E tels que $\phi(A) = \phi(B)$.

Utilisation du **théorème 6** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence I.

Alors $\varphi_A = \varphi_B$, soit $A = B$ et ainsi l'application ϕ est injective.

Soit f une application de E dans $\{0,1\}$.
Considérons la partie X de E définie par $X = \{x \in E, f(x) = 1\}$.

En effet, $\begin{aligned} \varphi_X : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin X \\ 1, \text{ si } x \in X \end{cases} \end{aligned}$.

Il est clair que $f = \varphi_X = \phi(X)$ et donc ϕ est surjective.

Ainsi, l'application ϕ est bijective donc $\mathcal{P}(E)$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^E) = (\mathrm{Card}(\{0,1\}))^{\mathrm{Card}(E)} = 2^{\mathrm{Card}(E)} .$$
□

Les exercices du chapitre 1

1 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$.

Montrer que l'ensemble $[\![a, b]\!]$ est fini et déterminer son cardinal.

2 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soient n un entier naturel non nul et a un élément de $\mathbb{N}_n$.

1) Montrer qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}_n \setminus \{a\}$ sur $\mathbb{N}_{n-1}$.

2) En déduire que pour tout ensemble E et tout élément a de E, qu'il existe une bijection de $E \setminus \{a\}$ sur $\mathbb{N}_{n-1}$.

On n'utilisera pas les propriétés sur les cardinaux.

3 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soient n un entier naturel non nul et a un élément de $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_n$.

1) Montrer qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}_n \cup \{a\}$ sur $\mathbb{N}_{n+1}$.

2) En déduire que pour tout ensemble E et tout élément a n'appartenant pas à E, qu'il existe une bijection de $E \cup \{a\}$ sur $\mathbb{N}_{n+1}$.

On n'utilisera pas les propriétés sur les cardinaux.

4 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$ est fini.

5 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles finis d'un ensemble E.

Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$ est fini.

6 Différence symétrique de deux ensembles finis 🖫

Soient A et B deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

L'ensemble $A \Delta B$ est-il fini ?

7 L'ensemble N est infini 🖫

Montrer que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est infini.

8 ★ Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soit n un entier naturel.

Montrer que tout injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_n$ est bijective.

On utilisera l'exercice 2 sans utiliser les propriétés sur les cardinaux.

9 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille <u>finie</u> de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ est fini.

10 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille <u>finie</u> de sous-ensembles finis d'un ensemble E.

Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ est fini.

11 Différence de deux ensembles finis 🖫

Soient A et B deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

L'ensemble $A - B$ est-il fini ?

12 ★ Une autre démonstration du théorème 30 🖫

Montrer le **théorème 30** du cours par récurrence.

13 Une version plus générale du lemme des bergers 🖫

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application avec E un ensemble fini.

Montrer que :

$$\operatorname{Card}(E) = \sum_{y \in F} \operatorname{Card}(f^{-1}\langle\{y\}\rangle).$$

14 Image directe et réciproque 🖫

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

On considère un sous-ensemble A de E.

1) Montrer que $f\langle A\rangle$ est fini et que $\operatorname{Card}(f\langle A\rangle) \leqslant \operatorname{Card}(A)$.

On considère un sous-ensemble B de F.

2) a) Montrer que $f^{-1}\langle B\rangle$ n'est pas nécessairement fini.

b) Montrer que si f est injective, alors $f^{-1}\langle B\rangle$ est fini.

c) Que peut-on alors dire sur le cardinal de $f^{-1}\langle B\rangle$?

15 ★ Involution et cardinalité

Soient $f : E \longrightarrow E$ une involution et A la partie de E défini par :

$$A = \{x \in E, f(x) \neq x\}.$$

Montrer que si A est fini, alors le cardinal de A est pair.

16 ★★ Involution et cardinalité

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$p \neq q\ ,\ a_p \leqslant a_q \text{ et } b_q \leqslant b_q.$$

17 ★★ Nombres entiers

Soient n et p deux entier naturel tel que $n \geqslant p^2 + 1$.

On considère le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Montrons qu'au moins $p+1$ des nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux ou au moins $p+1$ des nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux différents.

18 ★★ Cardinal d'un ensemble

Soit n un entier naturel.

Déterminer le cardinal de l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2, 2x + 3y = n\} \ ?$$

19 ★ Ensembles équipotents 🖫

Soient E et F deux ensembles.

1) Montrer que les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ sont équipotents.

2) Montrer que les ensembles $(\mathcal{P}(E))^F$ et $\mathcal{P}(E \times F)$ sont équipotents.

20 ★ Ensembles équipotents 🖫

Soient E, F et G trois ensembles.

1) Montrer que les ensembles $(E \times F)^G$ et $E^G \times F^G$ sont équipotents.

2) Montrer que les ensembles $(E^F)^G$ et $E^{F \times G}$ sont équipotents.

21 Ensembles équipotents 🖫

Soient E, F, G et H des ensembles.

Montrer que :

$$1)\ \begin{cases} E \simeq F \\ G \simeq H \end{cases} \Rightarrow E \times G \simeq F \times H \qquad 2)\ \begin{cases} E \simeq F \\ G \simeq H \end{cases} \Rightarrow G^E \simeq H^F$$

$$3)\ E \simeq F \Rightarrow \mathcal{P}(E) \simeq \mathcal{P}(F).$$