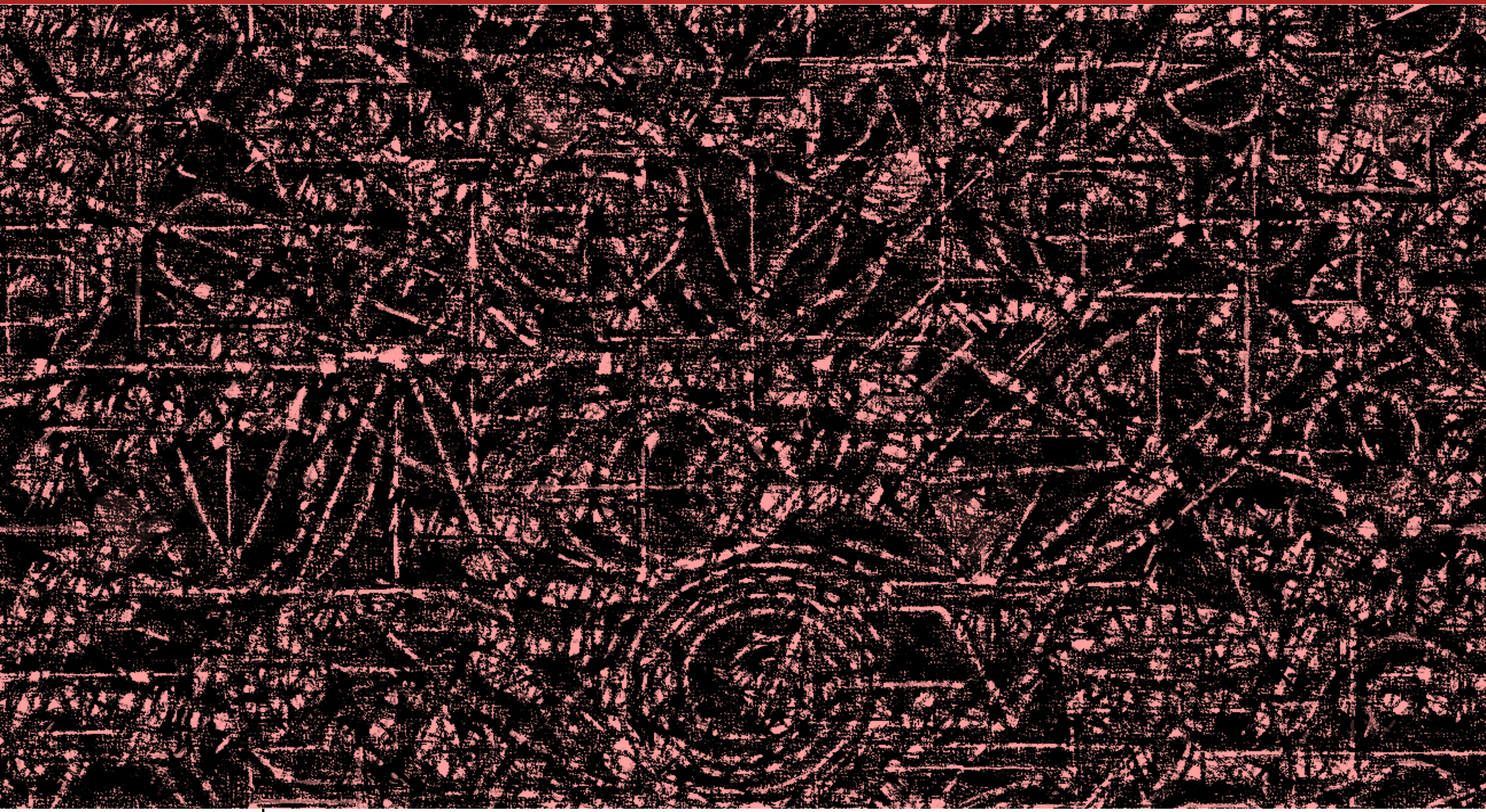
1 Axiomes d'incidence



Introduction

Faire de la géométrie à l'ancienne en licence 1 ? Et pourquoi pas ! Habituellement, la présentation de la géométrie qui est proposée dans le cadre des études supérieures est une présentation algébrique, basée sur les espaces vectoriels (nous finirons par le faire). Mais celle proposée au collège et au lycée est insuffisante. En effet, il n'y a pas dans le parcours scolaire une étude approfondie des axiomes fondant la géométrie euclidienne. De ce fait, nombreux sont les axiomes « cachés » et les raisonnements implicites du style « on voit que ». Par exemple, savez-vous expliquer pourquoi les diagonales d'un rectangle se coupent à l'intérieur de celui-ci ? La question semble évidente avec un dessin mais le démontrer semble plus difficile !

Notre défi dans ce livre sera de reconstruire entièrement la géométrie. Bien entendu, nous abuserons des dessins qui ne seront là que pour organiser les idées dans les preuves.

David Hilbert (1862-1943) était un mathématicien allemand.

Nous adoptons le point de vue formaliste de **Hilbert** dans son livre *Les fondements de la géométrie* publié pour la première fois en 1899.

Prérequis

- Logique, raisonnements, quantificateurs (**chapitre 0** du livre Cahier Licence 1)
- Théorie naïve des ensembles (**chapitre 1** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Présenter les axiomes d'incidence
- Démontrer les premières conséquences des axiomes d'incidence
- Démontrer le **théorème du toit**

Le cours du chapitre 1

1 Axiomes d'incidence

A Avant de commencer

On appelle **géométrie**, la donnée d'un ensemble appelé **espace**, dont les éléments sont appelés **points**, de sous-ensembles appelés **plans** et **droites**, et d'une liste d'axiomes que nous allons exposer sur plusieurs chapitres.

Tous les objets cités ci-contre seront considérés comme non vides.

B Points et droites

Au sens ensembliste, un point peut ou non appartenir à une droite. Nous utiliserons néanmoins les formulations équivalentes suivantes :
- le point *est situé* (ou *sur*) sur la droite ;
- la droite *contient* le point ;
- la droite *passe* par le point ;
- le point est *incident* à la droite ;
- la droite est *incident* au point.

L'avantage des deux dernières formulations, est le rôle symétrique du terme « incident ».

Axiome 1

Par deux points distincts, il existe une unique droite incidente à ces deux points.

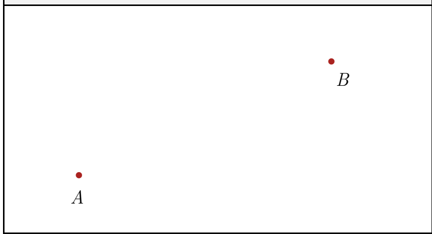
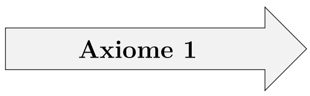
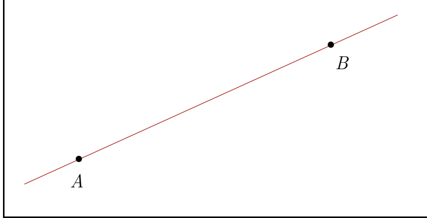
Remarques

1. La formalisation de l'**axiome 1** donne (en notant $\mathcal{E}$ l'espace et Đ l'ensemble des droites de l'espace) :

$$\forall (A,B)\in\mathcal{E}^2, A\neq B \Rightarrow \exists!\,\mathcal{D}\in\text{Đ}, (A\in\mathcal{D})\wedge(B\in\mathcal{D}).$$

2. Pour des points A et B distincts, on notera (AB) (ou (BA)) l'unique droite passant par les points A et B.
3. Schématisons l'**axiome 1** :

Il est clair que la formalisation des énoncés géométriques est lourde et nous éviterons alors de le faire systématiquement.

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
		
Les points A et B sont distincts.		Une droite et une seule passe par les points A et B.

Théorème 1

Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

Comme pour la théorie des ensembles, deux droites distinctes sont deux droites telles qu'il existe un point de l'un n'appartenant pas à l'autre.

Preuve

Considérons deux droites distincts $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (donc $\mathcal{D}\neq\mathcal{D}'$).
Supposons qu'il existe deux points (au moins) incidents aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Via l'**axiome 1** on aurait $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$, contradiction. □

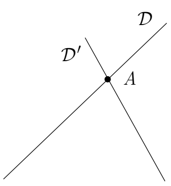
Le théorème précédent nous mène à la définition suivante :

Définition 1

Dire que deux droites sont **sécantes** signifie qu'elles sont distinctes et ont un unique point commun.

Remarques

1. L'unique point commun de deux droites sécantes est appelé **point d'intersection**.
2. Lorsque deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes, leur intersection décrit un singleton. Par exemple, si A est le point commun aux deux droites, on a $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\{A\}$. Abusivement, on dira quand même que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour point d'intersection le point A (au lieu de $\{A\}$).
3. Deux droites seront dites **confondues** si elles ne sont pas distinctes (donc si $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$).



Axiome 2

Pour toute droite, il existe deux points distincts incidents à cette droite.

Ainsi, les droites ne sont pas réduites à des singletons.

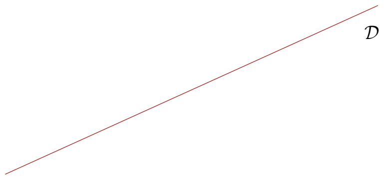
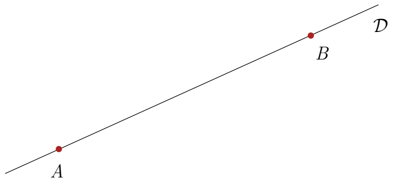
Le cours du chapitre 1

Remarques

1. La formalisation de l'**axiome 2** donne :

$$\forall \mathcal{D} \in Đ, \exists (A, B) \in \mathcal{E}^2, (A \neq B) \wedge (A \in \mathcal{D}) \wedge (B \in \mathcal{D}).$$

2. Schématisons l'**axiome 2** :

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
	**Axiome 2**	
On dispose d'une droite $\mathcal{D}$.		Il existe deux points distincts A et B appartenant à $\mathcal{D}$.

Autrement dit, des points alignés sont des points appartenant à une même droite.

Définition 2

Dire que des points sont **alignés** signifie qu'il existe une droite incidente à ces points.

Remarques

1. Il est clair que compte tenu de l'**axiome 1**, deux points distincts sont toujours alignés.
2. Remarquez qu'il existe toujours pour un point donné au moins une droite incidente à ce point.

Cela est garanti par les **axiomes 1** et **2**. En effet, l'espace étant constitué d'au moins une droite, il contient au moins deux points (**axiome 2**). Puis pour un point donné il suffit d'appliquer l'**axiome 1**.

Remarquez que dans ce cas, les points sont nécessairement distincts.

Axiome 3

Il existe trois points tel qu'aucune droite ne soit incidente aux trois.

Remarques

1. L'**axiome 3** revient à dire qu'il existe trois points non alignés.
2. La formalisation de l'**axiome 3** donne :

$$\exists (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \forall \mathcal{D} \in Đ, (A \notin \mathcal{D}) \vee (B \notin \mathcal{D}) \vee (C \notin \mathcal{D}).$$

Le **théorème 2** est un équivalent de l'**axiome 3**.

Théorème 2

Quel que soit la droite, il existe un point non incident à cette droite.

Preuve

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace.

D'après l'**axiome 3**, il existe trois points A, B et C tels qu'aucune droite ne soit incidente aux points A, B et C.

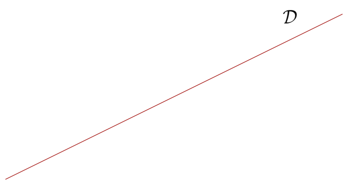
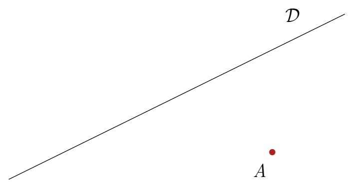
En particulier, la droite $\mathcal{D}$ ne passe pas par l'un des trois points A, B ou C. □

Remarques

1. La formalisation du **théorème 2** donne :

$$\forall \mathcal{D} \in Đ, \exists A \in \mathcal{E}, A \notin \mathcal{D}.$$

2. Schématisons le **théorème 2** :

Données initiales	Théorème utilisé	Conclusion
	**Théorème 2**	
On considère une droite $\mathcal{D}$.		Il existe au moins un point qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

Théorème 3

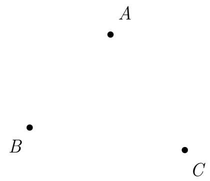
Quel que soit le point, il existe une droite ne le contenant pas.

Preuve

Considérons trois points distincts A, B et C non alignés.

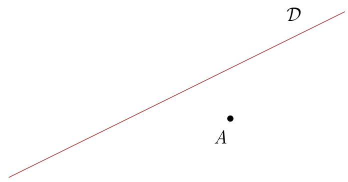
L'existence de tels points est garantie par l'**axiome 3**.

Le cours du chapitre 1



Considérons de plus un point P.
Il y a deux possibilités.
Soit le point P n'appartient pas à la droite (AC) : dans ce cas cette droite n'est pas incidente à P et c'est gagné.
Soit le point P appartient à la droite (AC). S'il est distinct de A, alors la droite (BA) n'est pas incidente à A puisque $(BA) \cap (AC) = \{A\}$.
Si le point P est confondu avec A, alors la droite (BC) n'est pas incidente à P (sinon les points A, B et C seraient dans ce cas alignés).
Dans tous les cas, il existe toujours une droite qui ne contient pas P. □

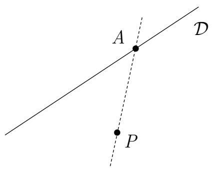
Remarques
1. La formalisation du **théorème 3** donne :
$$\forall A \in \mathcal{E}, \exists \mathcal{D} \in Ð, A \notin \mathcal{D}.$$
2. Schématisons le **théorème 3** :

Données initiales	Théorème utilisé	Conclusion
	Théorème 3	
On considère un point A.		Il existe au moins une droite qui ne passe pas par A.

Autrement dit, un point est toujours le point d'intersection d'au moins deux droites.

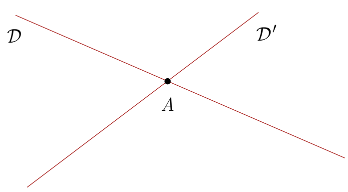
Théorème 4
Quel que soit le point, il existe deux droites incidentes à ce point.

Preuve



Soit A un point.
Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une unique droite $\mathcal{D}$ passant par A.
Donnons-nous un point P et supposons que les points P et A sont distincts (application du **théorème 2**).
Alors d'après l'**axiome 1**, il existe une droite unique passant par A et P. Mais comme par hypothèse il existe une unique droite passant par A, cela ne peut être que la droite $\mathcal{D}$.
Ainsi, les droites (PA) et $\mathcal{D}$ sont confondues et en particulier, le point P appartient à la droite $\mathcal{D}$.
Mais alors, tous les points du plan seraient alignés (car ils seraient tous sur la droite $\mathcal{D}$), ce qui est contradictoire avec l'**axiome 3**.
Par suite, il existe au moins deux droites passant par A. □

Remarques
1. La formalisation du **théorème 4** donne :
$$\forall A \in \mathcal{E}, \exists (\mathcal{D}, \mathcal{D}') \in Ð^2, \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{A\}.$$
2. Schématisons le **théorème 4** :

Données initiales	Théorème utilisé	Conclusion
	Théorème 4	
On considère un point A.		Il existe au moins deux droites sécantes en A.

C Points et plans

Au sens ensembliste, un point peut ou non appartenir à un plan. Nous utiliserons néanmoins les formulations équivalentes suivantes :
- le point *est situé* (ou *sur*) sur le plan ;
- le plan *contient* le point ;

Le cours du chapitre 1

- le plan *passe* par le point ;
- le point est *incident* au plan ;
- le plan est *incident* au point.

Comme pour les points et les droites, nous utiliserons le terme incident le plus souvent possible.

Cet axiome a un sens compte tenu de l'**axiome 3** : il existe dans l'espace toujours trois points non alignés.

Axiome 4

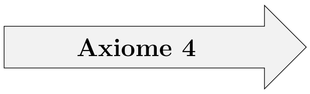
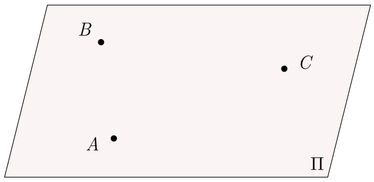
Par trois points non alignés, il existe un unique plan incident à ces trois points.

Remarques

1. La formalisation de l'**axiome 4** donne (en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des plans de l'espace) :

$$\forall(A,B,C)\in\mathcal{E}^3, \exists!\,\Pi\in\mathcal{P}, (A\in\mathcal{P})\wedge(B\in\mathcal{P})\wedge(C\in\mathcal{P})\,.$$

2. Pour trois points A, B et C non alignés, on notera (ABC) (ou (BAC), (ACB), (BCA), (CAB), (CBA)) l'unique plan passant par les points A, B et C.
3. D'après l'**axiome 4**, un plan est entièrement déterminé par la donnée de trois points non alignés.
4. Schématisons l'**axiome 4** :

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
		
On considère trois points non alignés A, B et C.		Il existe au moins un plan contenant ces trois points.

Définition 3

Dire que des points sont **coplanaires** signifient qu'il existe un plan incident à ces points.

Remarques

1. Compte tenu de l'**axiome 4**, trois points sont toujours coplanaires.
2. Deux points sont toujours coplanaires.

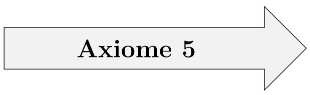
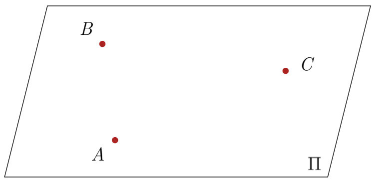
L'**axiome 5** est lourd à quantifier.

Axiome 5

Pour tout plan, il existe trois points non alignés et incidents à ce plan.

Remarque

Schématisons l'**axiome 5** :

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
		
On considère un plan.		Il existe au moins trois points non alignés appartenant à ce plan.

Remarque

De ce qui précède, un plan contient au moins deux droites distinctes.

Axiome 6

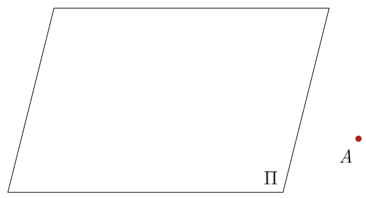
Pour tout plan, il existe un point non incident à ce plan.

Remarques

1. La formalisation de l'**axiome 6** donne :

$$\forall\Pi\in\mathcal{P}, \exists A\in\mathcal{E}, A\notin\Pi\,.$$

2. Schématisons l'**axiome 6** :

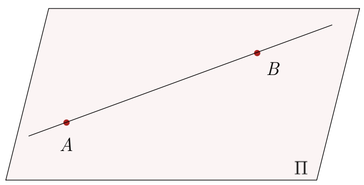
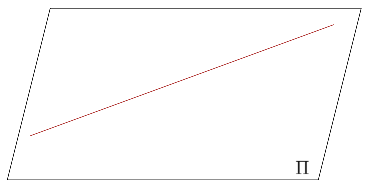
Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
	Axiome 6	
On considère un plan.		Il existe un point n'appartenant pas à ce plan.

D Droites et plans

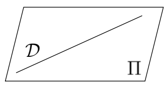
Axiome 7

Si deux points distincts d'une droite sont incidents à un plan, alors tous les points de la droite sont incidents à ce plan.

Remarque
Schématisons l'**axiome 7** :

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
	Axiome 7	
Un plan contient deux points A et B.		Tous les points de la droites (AB) appartiennent au plan.

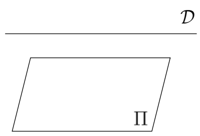
On dispose alors de la définition suivante :



Définition 4

Soient $\mathcal{D}$ une droite et Π un plan.
Dire que la droite $\mathcal{D}$ est **incluse** dans le plan Π signifie qu'ils ont au moins deux points communs.

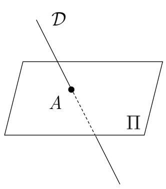
Remarques
1. Pour signifier que la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan Π, on écrira « $\mathcal{D} \subset \Pi$ ». Cette notation n'est pas une surprise car en théorie des ensembles, elle signifie que tout élément de la droite $\mathcal{D}$ est un élément du plan Π (ce qui est garanti par l'**axiome 7**).
2. Il est clair que si la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan Π, alors $\mathcal{D} \cap \Pi = \mathcal{D}$.



Définition 5

Soient $\mathcal{D}$ une droite et Π un plan.
Dire que la droite $\mathcal{D}$ est **parallèle** au plan Π signifie qu'ils n'ont aucun point commun.

Remarques
1. Par définition, quand la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan Π, on a $\mathcal{D} \cap \Pi = \varnothing$.
2. Pour signifier que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan Π, on écrira « $\mathcal{D} \mathbin{//} \Pi$ ».



Définition 6

Soient $\mathcal{D}$ une droite et Π un plan.
Dire que la droite $\mathcal{D}$ est **sécante** au plan Π signifie qu'ils ont un unique point commun.

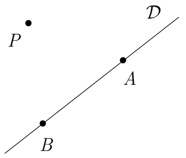
Remarques
1. Si A est l'unique point commun de la droite $\mathcal{D}$ et du plan Π, alors $\mathcal{D} \cap \Pi = \{A\}$.
2. Lorsque la droite $\mathcal{D}$ est sécante au plan Π, on pourra aussi dire qu'elle *perce* le plan Π.
3. Des trois définitions précédentes, on en déduit qu'il n'existe que trois positions relatives d'une droite et d'un plan (voir les trois figures en marge ci-dessus).

Le cours du chapitre 1

E Droites

Théorème 5

Par un point et une droite non incidente à ce point, il existe un unique plan contenant le point et la droite.

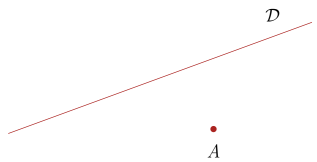
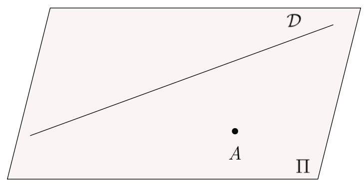


Preuve

Soient P un point et $\mathcal{D}$ une droite non incidente à P (application du **théorème 3**).
D'après l'**axiome 2,** il existe deux points distincts A et B appartenant à la droite $\mathcal{D}$.
Ainsi, le plan (ABP) contient la droite $\mathcal{D}$ (**axiome 7**) et évidemment le point P.
Enfin, l'unicité de ce plan provient de l'**axiome 4** (les points A, B et P ne sont pas alignés). □

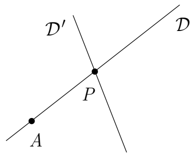
Remarques

1. D'après le **théorème 5**, un plan est entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'une droite non incident à ce point.
2. Schématisons le **théorème 5** :

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
	Théorème 5	
On dispose d'un point A et d'une droite $\mathcal{D}$ qui ne passe pas par le point A.		Un seul plan contient le point A et la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 6

Si deux droites sont sécantes, alors il existe un unique plan contenant ces deux droites.

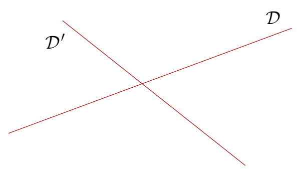
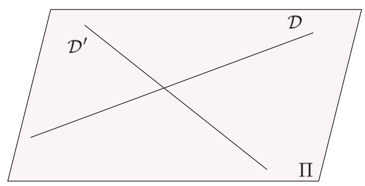


Preuve

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en un point P.
Considérons un point A appartenant à la droite $\mathcal{D}$ mais distinct de P (application de l'**axiome 2**).
Il est alors clair que le point A n'appartient à la droite $\mathcal{D}'$.
D'après le **théorème 5**, il existe alors un unique plan contenant le point A et la droite $\mathcal{D}'$.
Ce plan (unique) contenant les points A et P, il contient la droite $\mathcal{D}$ (**axiome 7**). □

Remarques

1. D'après le **théorème 6**, un plan est entièrement déterminé par la donnée de deux droites sécantes.
2. Schématisons le **théorème 6** :

Données initiales	Axiome utilisé	Conclusion
	Théorème 6	
On dispose de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.		Un seul plan contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Définition 7

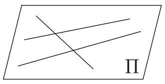
Compte tenu de la définition, des droites concourantes sont au minimum deux.

Dire que des droites sont **concourantes** signifie qu'elles sont sécantes deux à deux en un même point.

Remarques

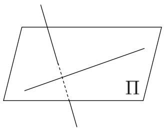
1. Il est clair que deux droites séantes sont concourantes.
2. Lorsque des droites sont concourantes en un point, on pourra simplement dire que ces droites sont sécantes en ce point.
3. Le point commun à des droites concourantes s'appelle le **point de concours** des droites.

Comme on le sait depuis le collège, le point de concours des médianes d'un triangle est le centre de gravité.



Définition 8

Dire que des droites sont **coplanaires** signifie qu'il existe un plan contenant ces droites.



Remarques

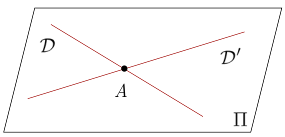
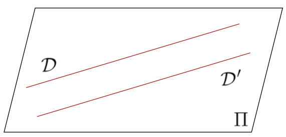
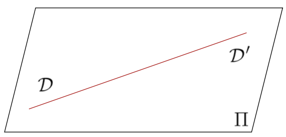
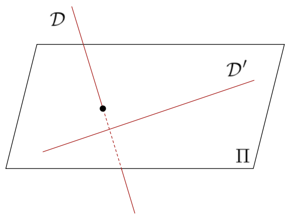
1. D'après le **théorème 6**, deux droites sécantes sont toujours coplanaires.
2. Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun (à démontrer par le lecteur en exercice, réponse en vidéo).

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace.
On a deux possibilités :
- les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires ;
- les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

En clair, il n'y a pas de nouvelles possibilités.

Dans le premier cas l'étude s'arrête immédiatement car elles n'ont aucun point commun.
Dans le second cas, il y a encore d'autres possibilités. En effet, ou bien les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont distinctes, ou bien elles ne le sont pas, dans ce dernier cas elles sont confondues.
Sinon, quand elles sont distinctes mais pas sécantes, elles sont dites **parallèles** (on notera $\mathcal{D} \mathbin{//} \mathcal{D}'$).
Résumons notre étude à l'aide d'un tableau :

Attention, dans l'espace, deux droites non sécantes ne sont pas nécessairement parallèles (elles peuvent être non coplanaires ou confondues).
Remarquez aussi que le terme « parallèle » est pris dans son sens strict. Autrement dit, deux droites confondues ne sont pas considérées comme parallèles (puisque deux droites parallèles sont nécessairement distinctes).

Droites coplanaires			Droites non coplanaires
Droites distinctes		Droites confondues	
Droites sécantes	Droites parallèles		
			
$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{A\}$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \mathcal{D} = \mathcal{D}'$	$\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$

F Plans

Axiome 8

Si deux plans ont un point commun, alors ils ont un autre point commun.

L'autre point commun est donc distinct du premier.

L'**axiome 8** permet d'affirmer que si deux plans ont un point commun, alors ils ont une droite en commun (application des **axiomes 1** et **7**). Mais on a mieux :

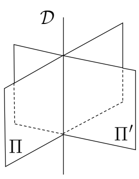
Théorème 7

Deux plans distincts ont au plus une droite en commun.

Preuve

Considérons deux plans distincts Π et Π' .
Supposons que ces plans ont (au moins) deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en commun.
Si ces droites sont sécantes, alors un unique plan les contient (**théorème 6**), ce qui est contradictoire.
Si ces droites ne sont pas sécantes, alors elles sont parallèles (puisqu'elles sont distinctes et coplanaires). Mais si on nomme A un point de la droite $\mathcal{D}$, alors il existe un unique plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et le point A, ce qui mène encore à une contradiction puisque les plans Π et Π' (distincts) contiennent le point A et la droite $\mathcal{D}$. □

Le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}'$ puisque les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont aucun point commun.

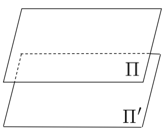


Définition 9

Dire que deux plans sont **sécants** signifie qu'ils sont distincts et ont une unique droite en commun.

Remarques

1. L'unique droite commune de deux plans sécants est appelée **droite d'intersection**.
2. Deux plans Π et Π' sont dits **confondus** quand ils ne sont pas distincts (donc quand $\Pi = \Pi'$).



Définition 10

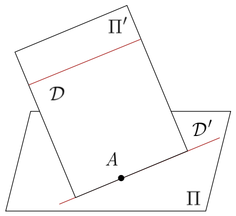
Dire que deux plans sont **parallèles** signifie qu'ils sont distincts et qu'ils n'ont aucun point commun.

2 Quelques théorèmes de la géométrie dans l'espace

Nous démontrons dans ce paragraphe quelques théorèmes de la géométrie dans l'espace. D'autres seront démontrés dans un chapitre ultérieur car ils nécessitent un axiome *ad hoc* : l'**axiome des parallèles**.

Théorème 8

Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à au moins une droite de ce plan.



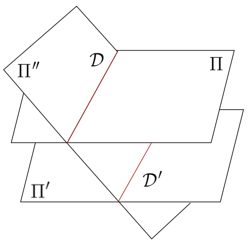
Preuve

Soient Π un plan et $\mathcal{D}$ une droite parallèle à Π.
Considérons un point A du plan Π.
Il est clair que ce point n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$ (**définition 5**).
Il existe donc un plan Π' contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$ (**théorème 5**).
Les plans Π et Π' sont sécants (application de l'**axiome 8**). Notons $\mathcal{D}'$ leur droite d'intersection.
D'une part, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
D'autre part, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont soit parallèles, soit sécantes (le cas où elles sont confondues est exclu).
Supposons alors qu'elles sont sécantes et appelons M leur point d'intersection.
Comme M appartient à $\mathcal{D}'$, c'est un point du plan Π.
Puis, M appartient aussi à $\mathcal{D}$, ce qui est absurde car la droite $\mathcal{D}$ et le plan Π n'ont aucun point commun (on rappelle que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan Π).
Ainsi, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. $\square$

Pour indiquer que deux plans sont sécants, on peut dire « deux plans qui se coupent ».

Théorème 9

Si deux plans sont parallèles et si un troisième plan les coupe, alors les droites d'intersections sont parallèles.



Preuve

Soient Π et Π' deux plans parallèles.
Supposons qu'un plan Π'' coupe les plans Π et Π'.
Notons $\mathcal{D} = \Pi \cap \Pi''$ et $\mathcal{D}' = \Pi' \cap \Pi''$. Il est alors clair que le plan Π'' contient les plans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire que ces droites sont coplanaires.
Elles ne peuvent pas être sécantes, car sinon, si on note A le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, les plans Π et Π' auraient A comme point commun et donc seraient sécants.
Il vient alors que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. $\square$

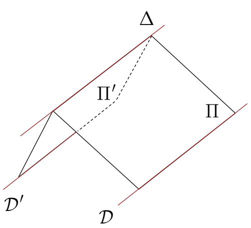
Le **théorème 10** s'appelle ainsi en raison de la figure (voir ci-dessous) qui l'illustre.

Théorème 10 — **Théorème du toit**

Soient Π et Π' deux plans sécants selon une droite Δ.
S'il existe une droite $\mathcal{D}$ incluse dans le plan Π et une droite $\mathcal{D}'$ incluse dans le plan Π' telles que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, alors les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles ou confondues.

On a aussi le même résultat en remplaçant $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}'$.

Attention la preuve demande un effort de concentration.



Preuve

Supposons que les droites $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. On va montrer qu'elles sont confondues.
Comme ces droites sont coplanaires, elles sont sécantes et ont donc un unique point commun A.
Le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}'$ (car $\mathcal{D} \mathbin{/\!/} \mathcal{D}'$) ; il existe alors un unique plan Π'' contenant la droite $\mathcal{D}'$ et le point A. Les plans Π' et Π'' sont par conséquent confondus (puisque le plan Π' le point A et la droite $\mathcal{D}'$).
Mais les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en A définissent un unique plan qui contient A et $\mathcal{D}'$. Donc ce plan est confondu avec Π'' et donc avec Π'.
On en déduit que le plan Π' contient la droite $\mathcal{D}$ qui est donc la droite d'intersection des plans Π et Π'.
Il vient donc que $\Delta = \mathcal{D}$. $\square$