Construction de $\mathbb{Q}$

11

Introduction

Pour a et b fixés dans $\mathbb{Z}$, l'équation d'inconnue x : $a + x = b$ admet toujours une solution. Cela n'est guère étonnant puisque c'était le but.
En revanche, pour l'équation d'inconnue x : $bx = a$ $(*)$, les choses deviennent plus compliquées. Déjà si b est nul, il faut que a le soit aussi mais ce cas ne nous intéresse pas. Si b n'est pas nul, cette équation n'admet pas toujours une solution. L'équation $2x = 4$ en admet une (en faisant un peu d'arithmétique il est même facile de voir à quelle condition l'équation $(*)$ admet toujours une solution). Mais l'équation $2x = 5$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}$.
Nous allons alors construire un ensemble pour supprimer toute ces contraintes.

Soyons encore plus précis : nous cherchons un corps dans lequel $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau. Nous n'allons pas détailler cette recherche mais présenter directement la construction recherchée.

Prérequis

- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: PGCD et PPCM (**chapitre 10**)

Objectifs du chapitre

- Définir l'ensemble $\mathbb{Q}$ à l'aide d'une relation d'équivalence
- Démontrer les propriétés liées à l'addition dans $\mathbb{Q}$
- Démontrer les propriétés liées à la multiplication dans $\mathbb{Q}$
- Démontrer les propriétés liées à l'ordre dans $\mathbb{Q}$
- Immerger $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Le cours du chapitre 11

1 Généralités

A Motivation

Soient a un entier relatif et b un entier relatif non nul.
On s'intéresse à l'équation dans $\mathbb{Z}$ d'inconnue x :
$$bx = a \ \ (*).$$
Cette équation n'admet pas toujours une solution.
Quand b est un diviseur de a, l'entier x est identifié par le couple (a, b). Le souci, c'est que deux couples distincts peuvent être associés au même entier x.

Ici, b et d sont différents de 0.

Cherchons alors à quelle condition deux couples d'entiers relatifs (a, b) et (c, d) définissent le même entier x.

On rappelle que les entiers non nuls de $\mathbb{Z}$ sont réguliers pour la multiplication.

Quand x est une solution non nulle de l'équation $(*)$, les égalités $bx = a$ et $dx = c$ entraînent que :
$$bcx = adx \text{ , soit } bc = ad \, .$$
Quand x est nul, alors a et b le sont aussi et l'égalité $bc = ad$ est encore vérifiée.
Nous allons donc définir une relation entre les couples d'entiers relatifs et faire en sorte que cette dernière soit une relation d'équivalence.

B Définition des nombres rationnels

Attention c'est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et non $\mathbb{Z}^2$.

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par :
$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, (a, b) \, \mathcal{R} \, (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \, .$$

Théorème 1

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Preuve

Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Réflexivité

La multiplication étant commutative dans $\mathbb{Z}$: $ab = ba$, donc $(a, b) \, \mathcal{R} \, (b, a)$.

Symétrie

On dispose des implications suivantes : $(a, b) \, \mathcal{R} \, (c, d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \, \mathcal{R} \, (a, b)$.

Transitivité

Comme $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, le produit cd n'est pas nul, ce qui permettra de simplifier par celui-ci.

On dispose des implications suivantes : $\begin{cases} (a, b) \, \mathcal{R} \, (c, d) \\ (c, d) \, \mathcal{R} \, (e, f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ad = bc \\ cf = de \end{cases} \Rightarrow (ad)(cf) = (bc)(de) \Rightarrow (af)(cd) = (be)(cd)$
$$\Rightarrow af = be$$
$$\Rightarrow (a, b) \, \mathcal{R} \, (e, f) \, .$$

Ainsi $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. □

Remarques

1. L'ensemble-quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \mathcal{R}$ est noté usuellement $\mathbb{Q}$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on note naturellement $\overline{(a, b)} = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, (a, b) \, \mathcal{R} \, (c, d)\}$. Mais cette notation sera abandonnée et sera remplacée par $\dfrac{a}{b}$.

En clair, $\frac{a}{b} = \overline{(a, b)}$.

2. La classe d'équivalence $\dfrac{a}{b}$ est appelé **fraction**.

3. Dans l'écriture $\dfrac{a}{b}$, a est appelé **numérateur** et b **dénominateur**.

4. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés **nombres rationnels**.

Exemple

Par la relation $\mathcal{R}$, les couples $(2, 4)$, $(1, 2)$ et $(4, 8)$ sont en relation et la vérification est immédiate.

Ainsi, les classes $\dfrac{2}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{4}{8}$ sont égales.

C'est rassurant, car nous savons depuis bien avant ce chapitre que ces « nombres » sont égaux.

C Premières conséquences

Que signifie nombre rationnel nul ? Voici la réponse :

Théorème 2

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \frac{0}{1}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a=0\,.$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que $\frac{0}{1}=\frac{a}{b}$.

Alors $(0,1)\mathcal{R}(a,b)$, d'où $0\times b=1\times a$, soit $a=0$.

($\Leftarrow$) Immédiat. □

Remarque

On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{0}{1}\right\}$ des nombres rationnels non nuls.

Le **théorème 3** est bien connu du lecteur depuis le collège.

Théorème 3

$$\forall (a,b,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*, \frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}\,.$$

Preuve

Comme $a(bk)=b(ak)$, on a $(a,b)\mathcal{R}(ak,bk)$, c'est-à-dire $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$. □

D Représentant irréductible d'un nombre rationnel

Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.

Comme on vient de le voir, une infinité de couple d'entiers relatifs sont en relation avec le couple (a,b). Parmi tous les représentants possibles d'une même classe, un seul nous intéressera.

Attention, q est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Théorème 4 Représentant irréductible d'un nombre rationnel

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \exists!(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, \begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\\ \text{PGCD}(p,q)=1\end{cases}.$$

Preuve

Existence

Notons δ le PGCD de a et b.

D'après le **théorème 10** du **chapitre 10**, il existe deux entiers relatifs a' et b' tels que $a=\delta a'$, $b=\delta b'$ et $a'\wedge b'=1$.

Alors : $\frac{a}{b}=\frac{\delta a'}{\delta b'}=\frac{a'}{b'}$.

Si $b'>0$, il n'y a rien à faire.

Si $b'<0$, on considère le nombre rationnel $\frac{-a'}{-b'}$ (qui est bien égal à $\frac{a}{b}$ compte tenu du **théorème 3**).

Ainsi, suivant les cas, le couple (a',b') où $(-a',-b')$ convient.

Unicité

Soient deux couples (p,q) et (p',q') de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ avec $p\wedge q=p'\wedge q'=1$.

Puisque, $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$, on a $pq'=qp'$.

D'une part, $q\mid pq'$. Donc d'après le **théorème de Gauss** (q est premier avec p), $q\mid q'$.

D'autre part, $q'\mid qp'$. Donc d'après le **théorème de Gauss** (q' est premier avec p'), $q'\mid q$.

Utilisation de la régularité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi, par l'antisymétrie de la relation « divise » dans $\mathbb{N}$, on a $q=q'$ et par suite $p=p'$. □

Le cours du chapitre 11

E Réduction au même dénominateur

Avec la baisse de niveau inquiétante du niveau en mathématiques, cette technique s'apprend maintenant en quatrième.

La réduction au même dénominateur, bien connue depuis le collège provient du théorème suivant :

Ici, on sous-entend que a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls. Ce théorème permet d'alléger de nombreuses démonstrations pour la suite du cours.

Théorème 5 **Réduction au même dénominateur**

Soient α et β deux rationnels représentés par les classes $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$.

Si μ désigne le PPCM de b et d, alors il existe deux entiers e et f tels que :

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{\mu} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{f}{\mu}.$$

Preuve

Notons $\mu = b \vee d$.

Les entiers k et l sont non nuls sinon μ le serait (mais cela n'est pas possible puisque ni b, ni d est nul).

Par définition de μ, il existe deux entiers relatifs non nuls k et l tels que $\mu = bk$ et $\mu = dl$.

Puis, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ak}{bk} = \dfrac{ak}{\mu}$ et $\dfrac{c}{d} = \dfrac{cl}{dl} = \dfrac{cl}{\mu}$.

L'existence des entiers e et f est ainsi garantie en posant $e = ak$ et $f = cl$. □

2 Opérations dans Q

A Addition

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit une opération d'addition par :

L'addition est définie de manière non naturelle.

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, (a,b)+(c,d) = (ad+bc, bd).$$

On va montrer que la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition. C'est-à-dire que :

$$\forall (a,b),(a',b'),(c,d),(c',d') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \begin{cases} (a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b') \\ (c,d)\,\mathcal{R}\,(c',d') \end{cases} \Rightarrow (ad+bc,bd)\,\mathcal{R}\,(a'd'+b'c',b'd').$$

Pour cela, il vaut mieux partir de la fin.

En effet, la relation $(ad+bc,bd)\,\mathcal{R}\,(a'd'+b'c',b'd')$ est équivalente à l'égalité $(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$ soit donc $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$ $(*)$.

En supposant alors que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b')$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(c',d')$, il vient que $ab' = a'b$ et $cd' = c'd$.

Ainsi, nous avons bien la relation $(*)$.

On peut alors définir sans crainte l'addition de deux nombres rationnels.

On sous-entend que a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.

Définition 1

Soient α et β deux nombres rationnels représentés par les classes $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$.

On définit la **somme** des rationnels α et β en posant :

$$\alpha + \beta = \overline{(ad+bc,bd)}.$$

De ce qui vient d'être dit, le nombre rationnel $\overline{(ad+bc,bd)}$ ne dépend pas du choix des représentants des classes α et β.

Exemple

Donnons la somme des rationnels $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.

En utilisant la définition, on a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \times 3 + 2 \times 2}{2 \times 3} = \dfrac{7}{6}$.

Remarque

Par définition, $(\mathbb{Q},+)$ est un magma.

Théorème 6 **Associativité de l'addition dans $\mathbb{Q}$**

Autrement dit, l'addition dans $\mathbb{Q}$ est associative.

$$\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma.$$

Preuve

Notons $\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\beta = \dfrac{c}{d}$ et $\gamma = \dfrac{e}{f}$, où les lettres a, b, c, d, e et f sont des entiers relatifs avec b, d et f non nuls.

Notons aussi $\mu = b \vee d \vee f$.

Il existe alors des entiers relatifs a_1, c_1, e_1 tels que $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{\mu}$, $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{\mu}$ et $\frac{e}{f}=\frac{e_1}{\mu}$.

Utilisation de l'associativité de l'addition dans $\mathbb{Z}$.
Voir aussi l'**exercice 1**.

On a donc : $\alpha+(\beta+\gamma)=\frac{a_1}{\mu}+\left(\frac{c_1}{\mu}+\frac{e_1}{\mu}\right)=\frac{a_1}{\mu}+\frac{c_1+e_1}{\mu}=\frac{a_1+(c_1+e_1)}{\mu}=\frac{(a_1+c_1)+e_1}{\mu}=\frac{a_1+c_1}{\mu}+\frac{e_1}{\mu}$

$$=\left(\frac{a_1}{\mu}+\frac{c_1}{\mu}\right)+\frac{e_1}{\mu}$$

$$=(\alpha+\beta)+\gamma.$$ □

Remarque
On a montré que le couple $(\mathbb{Q},+)$ est un demi-groupe.

Théorème 7 Commutativité de l'addition dans $\mathbb{Q}$

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

Autrement dit, l'addition dans $\mathbb{Q}$ est commutative.

Preuve

Notons $\alpha=\frac{a}{b}$ et $\beta=\frac{c}{d}$, où toutes les lettres a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.
Notons aussi $\mu=b\vee d$.

Il existe alors des entiers relatifs a_1 et c_1 tels que $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{\mu}$ et $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{\mu}$.

Utilisation de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{Q}$.

On a donc : $\alpha+\beta=\frac{a_1}{\mu}+\frac{c_1}{\mu}=\frac{a_1+c_1}{\mu}=\frac{c_1+a_1}{\mu}=\frac{c_1}{\mu}+\frac{a_1}{\mu}=\beta+\alpha$. □

Théorème 8 Elément neutre de l'addition dans $\mathbb{Q}$

$$\forall\alpha\in\mathbb{Q}, \exists\varepsilon\in\mathbb{Q}, \alpha+\varepsilon=\varepsilon+\alpha=\alpha.$$

On va prouver que le rationnel $\frac{0}{1}$ est neutre pour l'addition.

Preuve

Notons $\alpha=\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs, b étant non nul.

On a : $\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a\times1+b\times0}{b\times1}=\frac{a}{b}$.

Ainsi, le rationnel $\frac{0}{1}$ est neutre pour l'addition dans $\mathbb{Q}$. □

Remarque
On a montré que le couple $(\mathbb{Q},+)$ est un monoïde commutatif.

Théorème 9 Eléments symétrisables pour l'addition dans $\mathbb{Q}$

$$\forall\alpha\in\mathbb{Q}, \exists\beta\in\mathbb{Q}, \alpha+\beta=\beta+\alpha=\frac{0}{1}.$$

Autrement dit, tout rationnel admet un opposé pour l'addition.

Preuve

Notons $\alpha=\frac{a}{b}$ et $\beta=\frac{-a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs, b étant non nul.

On a : $\alpha+\beta=\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{0}{b}=\frac{0}{1}$.
Ainsi, tout rationnel admet un opposé pour l'addition. □

Remarques
1. On a montré que le couple $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe commutatif.
2. De ce qui précède, tous les rationnels sont réguliers pour l'addition.
3. Pour tout rationnel α, on notera par commodité $-\alpha$ l'opposé de α.
Il vient alors que pour tout rationnel α, $-(-\alpha)=\alpha$.
4. Pour α et β dans $\mathbb{Q}$, le rationnel $\alpha+(-\beta)$ sera noté $\alpha-\beta$ et s'appelle **différence** de α et β.

On rappelle que dans un groupe, tout élément est régulier.

Le cours du chapitre 11

B Multiplication

Sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, on définit une opération de multiplication par :

$$\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*,(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)\,.$$

On va montrer que la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la multiplication. C'est-à-dire que :

$$\forall(a,b),(a',b'),(c,d),(c',d')\in\mathbb{N}^2,\begin{cases}(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b')\\(c,d)\,\mathcal{R}\,(c',d')\end{cases}\Rightarrow(ac,bd)\,\mathcal{R}\,(a'c',b'd')\,.$$

Supposons alors que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b')$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(c',d')$.

Alors $ab'=a'b$ et $cd'=c'd$.

En multipliant membre à membre, on obtient $(ab')(cd')=(a'b)(c'd)$, soit $(ac)(b'd')=(bd)(a'c')$, ce qui correspond bien à $(ac,bd)\,\mathcal{R}\,(a'c',b'd')$.

On est maintenant en mesure de définir le produit de deux rationnels.

On sous-entend que a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.

Définition 2

Soient α et β deux nombres rationnels représentés par les classes $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(c,d)}$.

On définit le **produit** des rationnels α et β en posant :

$$\alpha\times\beta=\overline{(ac,bd)}\,.$$

Exemple

Multiplions les rationnels $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{7}{6}$.

On a via la définition ci-dessus : $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{6}=\dfrac{1\times7}{4\times6}=\dfrac{7}{24}$.

Remarques

1. Par définition, $(\mathbb{Q},\times)$ est un magma.
2. Pour α et β dans $\mathbb{Q}$, on notera par commodité $\alpha\beta$ le produit de α par β au lieu de $\alpha\times\beta$.

Autrement dit, la multiplication dans $\mathbb{Q}$ est associative.

Théorème 10 **Associativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$**

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma\,.$$

Preuve

Notons $\alpha=\dfrac{a}{b}$, $\beta=\dfrac{c}{d}$ et $\gamma=\dfrac{e}{f}$, où les lettres a, b, c, d, e et f sont des entiers relatifs avec b, d et f non nuls.

Utilisation de l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

On a donc : $\alpha(\beta\gamma)=\dfrac{a}{b}\times\left(\dfrac{c}{d}\times\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{ce}{df}=\dfrac{a(ce)}{b(df)}=\dfrac{(ac)e}{(bd)f}=\dfrac{ac}{bd}\times\dfrac{e}{f}=\left(\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}\right)\times\dfrac{e}{f}=(\alpha\beta)\gamma$. □

Remarque

On a montré que le couple $(\mathbb{Q},\times)$ est un demi-groupe.

Autrement dit, la multiplication dans $\mathbb{Q}$ est commutative.

Théorème 11 **Commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$**

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\alpha\beta=\beta\alpha\,.$$

Preuve

Notons $\alpha=\dfrac{a}{b}$ et $\beta=\dfrac{c}{d}$, où toutes les lettres a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.

Utilisation de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

On a : $\alpha\beta=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}=\dfrac{c\times a}{d\times b}=\dfrac{c}{d}\times\dfrac{a}{b}=\beta\alpha$. □

On va montrer que le rationnel $\dfrac{1}{1}$ est neutre pour la multiplication.

Théorème 12 **Elément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}$**

$$\forall\alpha\in\mathbb{Q},\exists\varepsilon\in\mathbb{Q},\alpha\varepsilon=\varepsilon\alpha=\alpha\,.$$

Preuve

Notons $\alpha=\dfrac{a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs, b étant non nul.

On a : $\frac{a}{b}\times\frac{1}{1}=\frac{a\times 1}{b\times 1}=\frac{a}{b}$.

Ainsi, le rationnel $\frac{1}{1}$ est neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$. □

Remarque
On a montré que le couple $(\mathbb{Q},\times)$ est un monoïde commutatif.

Autrement dit, la multiplication est distributive sur l'addition.

Théorème 13 **Distributivité de la multiplication sur l'addition**

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\begin{cases}\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma\\(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha\end{cases}.$$

Preuve

Notons $\alpha=\frac{a}{b}$, $\beta=\frac{c}{d}$ et $\gamma=\frac{e}{f}$, où les lettres a, b, c, d, e et f sont des entiers relatifs avec b, d et f non nuls.

Notons aussi $\mu=b\vee d\vee f$.

Il existe alors des entiers relatifs a_1, c_1, e_1 tels que $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{\mu}$, $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{\mu}$ et $\frac{e}{f}=\frac{e_1}{\mu}$.

On a donc : $\alpha(\beta+\gamma)=\frac{a_1}{\mu}\times\left(\frac{c_1}{\mu}+\frac{e_1}{\mu}\right)=\frac{a_1}{\mu}\times\frac{c_1+e_1}{\mu}=\frac{a_1(c_1+e_1)}{\mu^2}=\frac{a_1c_1+a_1e_1}{\mu^2}=\frac{a_1c_1}{\mu\times\mu}+\frac{a_1e_1}{\mu\times\mu}=\frac{a_1}{\mu}\times\frac{c_1}{\mu}+\frac{a_1}{\mu}\times\frac{e_1}{\mu}$

$=\alpha\beta+\alpha\gamma$. □

Remarque
Nous avons établi que le triplet $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un anneau commutatif.

Autrement dit, tout rationnel non nul admet un inverse pour la multiplication.

Théorème 14 **Eléments symétrisables pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$**

$$\forall\alpha\in\mathbb{Q}^*,\exists\beta\in\mathbb{Q},\alpha\beta=\beta\alpha=\frac{1}{1}.$$

Preuve

Notons $\alpha=\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs, b étant non nul.

D'après le **théorème 2**, si $\alpha\in\mathbb{Q}^*$, alors a n'est pas nul.

Remarquez que $\beta\in\mathbb{Q}^*$.

Posons alors $\beta=\frac{b}{a}$.

On a : $\alpha\beta=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{1}{1}$.

Ainsi, tout rationnel non nul admet un inverse pour la multiplication. □

Remarques
1. Nous avons établi que le triplet $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un corps commutatif.
2. De ce qui précède, l'anneau $(\mathbb{Q},+,\times)$ est intègre.

C'est le **théorème 23** du **chapitre 5**.

C Ordre dans Q

Considérons un rationnel α non nul.

Il existe alors deux entiers relatifs non nuls a et b tel que $\alpha=\frac{a}{b}$.

Montrons que le signe du produit ab ne dépend pas du représentant choisi pour la classe α.

Si le couple (p,q) ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}^*$) est le représentant irréductible du couple (a,b), alors en notant δ le PGCD de a et b, on a $a=\delta p$ et $b=\delta q$.

Ainsi, $ab=\delta^2pq$. Deux cas s'imposent :
- $ab>0$, et alors $pq>0$;
- $ab<0$ et alors $pq<0$.

Ces constatations amènent aux définitions suivantes :

Le cours du chapitre 11

On sous-entend que a et b sont des entiers relatifs non nuls.

Définition 3

Soit α un rationnel représenté par la classe $\overline{(a,b)}$.

Dire que α est **strictement positif** signifie que le produit ab est strictement positif.

On notera $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels strictement positif et $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble $\mathbb{Q}_+^* \cup \left\{\frac{0}{1}\right\}$ des rationnels positifs.

Compte tenu de ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 15

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow ab \geqslant 0 .$$

Preuve

$(\Rightarrow)$ Supposons que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$.

Deux cas se présentent :

- soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$ et donc par définition $ab > 0$;

- soit $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ et alors $a = 0$ (**théorème 2**) et donc $ab = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $ab \geqslant 0$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $ab \geqslant 0$.

Deux cas se présentent :

- soit $ab > 0$, donc par définition $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$;

- soit $ab = 0$, et donc puisque $\mathbb{Z}$ est intègre (**exercice 1** du **chapitre 8**), $a = 0$ et donc (**théorème 2**) $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$.

Dans tous les cas, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$. □

On sous-entend que a et b sont des entiers relatifs non nuls.

Définition 4

Soit α un rationnel représenté par la classe $\overline{(a,b)}$.

Dire que α est **strictement négatif** signifie que le produit ab est strictement négatif.

On notera $\mathbb{Q}_-^*$ l'ensemble des rationnels strictement négatif et $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble $\mathbb{Q}_-^* \cup \left\{\frac{0}{1}\right\}$ des rationnels négatifs.

Compte tenu de ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 16

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_- \Leftrightarrow ab \leqslant 0 .$$

Preuve

Comme dans la démonstration du **théorème 15**. □

Remarques

C'est une conséquence de la totalité de l'ordre usuel dans $\mathbb{Z}$.

1. Il est clair que $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$.

2. Le lecteur montrera à titre d'exercice que $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \left\{\frac{0}{1}\right\}$.

Le **théorème 17** affirme que la somme de deux rationnels positifs est positive et que la somme de deux rationnels négatifs est négative.

Théorème 17

1) $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+, \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_+$ 2) $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_-, \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_-$.

Preuve

1) Soient α et β deux rationnels positifs.

Le cours du chapitre 11

Notons $\alpha = \dfrac{a}{b}$ et $\beta = \dfrac{c}{d}$, où toutes les lettres a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.

Notons aussi $\mu = b \vee d$.

Il existe alors des entiers relatifs a_1 et c_1 tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{\mu}$ et $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c_1}{\mu}$.

Puisque b et d sont non nuls, $\mu \geqslant 1$.

Puisque α, β et μ sont positifs, a_1 et c_1 sont aussi positifs.

On a donc : $\alpha + \beta = \dfrac{a_1}{\mu} + \dfrac{c_1}{\mu} = \dfrac{a_1 + c_1}{\mu}$.

Enfin, comme $a_1 + c_1 \geqslant 0$ (**théorème 3-1** et **théorème 10-1** du **chapitre 8**), il vient que $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}_+$.

2) De même, supposons que α et β sont des rationnels négatifs.

Comme μ positif, alors a_1 et c_1 sont négatifs.

On a donc : $\alpha + \beta = \dfrac{a_1}{\mu} + \dfrac{c_1}{\mu} = \dfrac{a_1 + c_1}{\mu}$.

Enfin, comme $a_1 + c_1 \leqslant 0$ (**théorème 3-2** et **théorème 10-3** du **chapitre 8**), il vient que $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}_-$. □

Le **théorème 18** illustre la « règle des signes » pour les rationnels.

Théorème 18

1) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$ 2) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_-, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$ 3) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_-, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_-$.

Preuve

Notons $\alpha = \dfrac{a}{b}$ et $\beta = \dfrac{c}{d}$, où toutes les lettres a, b, c et d sont des entiers relatifs avec b et d non nuls.

Il vient alors que $\alpha\beta = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

1) Supposons que α et β sont positifs.

Comme $ab \geqslant 0$ et $cd \geqslant 0$, on a $(ab)(cd) \geqslant 0$ et donc $\alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$.

2) Supposons que α et β sont négatifs.

Comme $ab \leqslant 0$ et $cd \leqslant 0$, on a $(ab)(cd) \geqslant 0$ et donc $\alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$.

3) Supposons que α est positif et β est négatif.

Comme $ab \geqslant 0$ et $cd \leqslant 0$, on a $(ab)(cd) \leqslant 0$ et donc $\alpha\beta \in \mathbb{Q}_-$. □

Autrement dit, l'opposé d'un rationnel positif est négatif et inversement.

Théorème 19

1) $\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+, -\alpha \in \mathbb{Q}_-$ 2) $\forall \alpha \in \mathbb{Q}_-, -\alpha \in \mathbb{Q}_+$.

Preuve

Notons $\alpha = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs (avec b non nul).

1) Supposons que α est positif.

On a $-ab = (-a)b$.
Voir aussi l'**exercice 2.**

Alors $ab \geqslant 0$, d'où $-ab \leqslant 0$, soit encore $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_-$.

Ainsi $-\alpha \in \mathbb{Q}_-$.

2) Supposons que α est négatif.

Alors $ab \leqslant 0$, d'où $-ab \geqslant 0$, soit encore $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$.

Ainsi $-\alpha \in \mathbb{Q}_+$. □

Définition 5

Soient α et β deux rationnels.

Dire que le rationnel α est **inférieur ou égal** à β signifie que $\beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+$.

Remarques

1. On écrit $\alpha \leqslant \beta$ pour signifier que α est inférieur ou égal à β.
2. Quand $\alpha \leqslant \beta$ avec de plus $\alpha \neq \beta$, on écrit $\alpha < \beta$.
3. La relation réciproque de la relation $\leqslant$ (resp. $<$) est notée $\geqslant$ (resp. $>$).

Le cours du chapitre 11

Théorème 20 **Relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$**

Le couple $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.

Preuve

Réflexivité

On a pour tout rationnel α : $\alpha - \alpha = \dfrac{0}{1}$.

Comme $\dfrac{0}{1} \in \mathbb{Q}_+$, il vient que $\alpha \leqslant \alpha$.

Antisymétrie

Soient α et β deux rationnels tels que $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \alpha$.

Alors $\beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+$ et $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}_+$, d'où $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta) \in \mathbb{Q}_-$.

On rappelle que $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$.

Ainsi, $\beta - \alpha = \dfrac{0}{1}$ et $\beta = \alpha$.

Transitivité

Soient α, β et γ des rationnels tels que $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \gamma$.

Alors $\beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+$ et $\gamma - \beta \in \mathbb{Q}_+$.

Somme de deux rationnels positifs.

Ainsi, $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}_+$, d'où $\alpha \leqslant \gamma$. □

Théorème 21 **Relation d'ordre totale dans $\mathbb{Q}$**

Le couple $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

Preuve

On sait déjà que le couple $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné. Il reste à montrer que : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2, (\alpha \leqslant \beta) \vee (\beta \leqslant \alpha)$.

Rappelons que $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$.

Ainsi, en considérant deux rationnels α et β, la différence $\beta - \alpha$ est nécessairement dans l'un des sous-ensembles $\mathbb{Q}_+$ ou $\mathbb{Q}_-$.

Dans le premier cas, on aurait $\alpha \leqslant \beta$ et dans le second cas, $\beta \leqslant \alpha$. □

Remarques

1. Il est clair que : $\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+, \dfrac{0}{1} \leqslant \alpha$.

2. Il est clair que : $\forall \alpha \in \mathbb{Q}_-, \alpha \leqslant \dfrac{0}{1}$.

Théorème 22

Autrement dit, un rationnel négatif est inférieur ou égal à un rationnel positif.

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}_-, \forall \beta \in \mathbb{Q}_+, \alpha \leqslant \beta.$$

Preuve

Soient α un rationnel négatif et β un rationnel négatif.

On a donc $\alpha \leqslant 0$ et $0 \leqslant \beta$, soit via la transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$, $\alpha \leqslant \beta$. □

Théorème 23 **Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition**

Autrement dit, la relation $\leqslant$ est compatible avec l'addition.

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma.$$

Preuve

Supposons que $\alpha \leqslant \beta$.

On a : $(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \beta + \gamma - \alpha - \gamma = \beta - \alpha$.

Comme $\alpha \leqslant \beta$ par hypothèse, il vient que $\beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+$ et donc que $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$. □

Théorème 24

Le **théorème 24** est une conséquence immédiate du **théorème 23**.
On peut additionner membre à membre des entiers relatifs dans des inégalités.

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Q}^4, \begin{cases} \alpha \leqslant \beta \\ \gamma \leqslant \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta.$$

Preuve

Supposons que $\alpha \leqslant \beta$ et $\gamma \leqslant \delta$.

D'une part, l'inégalité $\alpha \leqslant \beta$ entraîne que $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$, d'autre part l'inégalité $\gamma \leqslant \delta$ entraîne que $\gamma+\beta \leqslant \delta+\beta$.

Par transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$, on a $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\delta$. □

Théorème 25

1) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \forall\gamma\in\mathbb{Q}_+, \alpha\leqslant\beta \Rightarrow \alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$ 2) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \forall\gamma\in\mathbb{Q}_-, \alpha\leqslant\beta \Rightarrow \beta\gamma\leqslant\alpha\gamma$.

Preuve

1) Supposons que $\alpha \leqslant \beta$.

Alors $\beta-\alpha\in\mathbb{Q}_+$ et comme $\gamma\in\mathbb{Q}_+$, on a (**théorème 18-1**) $(\beta-\alpha)\gamma\in\mathbb{Q}_+$, c'est-à-dire $\beta\gamma-\alpha\gamma\in\mathbb{Q}_+$, soit encore $\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma$.

2) Supposons que $\alpha \leqslant \beta$.

Alors $\beta-\alpha\in\mathbb{Q}_+$ et comme $\gamma\in\mathbb{Q}_-$, on a (**théorème 18-3**) $(\beta-\alpha)\gamma\in\mathbb{Q}_-$, c'est-à-dire $\beta\gamma-\alpha\gamma\in\mathbb{Q}_-$, soit encore $\beta\gamma\leqslant\alpha\gamma$. □

On a utilisé l'équivalence suivante : $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2, \beta-\alpha\in\mathbb{Q}_- \Leftrightarrow \beta\leqslant\alpha$. Elle s'établit facilement en remarquant que $-(\beta-\alpha)\in\mathbb{Q}_+$.

Théorème 26

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in(\mathbb{Q}_+)^4, \begin{cases}\alpha\leqslant\beta\\ \gamma\leqslant\delta\end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma\leqslant\beta\delta.$$

Autrement dit, on peut multiplier membre à membre des rationnels dans des inégalités mais attention, cela ne fonctionne qu'avec des rationnels positifs.

Preuve

Supposons que $\alpha \leqslant \beta$ et $\gamma \leqslant \delta$.

On a : $\beta\delta-\alpha\gamma = \beta\delta-\alpha\gamma+\beta\gamma-\beta\gamma = \beta(\delta-\gamma)+\gamma(\beta-\alpha)$.

Technique astucieuse à retenir.

Par produit et somme de rationnels, on déduit que $\beta\delta-\alpha\gamma\geqslant 0$ et donc $\alpha\gamma\leqslant\beta\delta$. □

3 Plongement de Z dans Q

On aimerait bien considérer les entiers relatifs comme des cas particuliers de rationnels.
Mais il y a un problème de taille ! Tous les rationnels se voient comme des ensembles de couples d'entiers relatifs.
Il est donc théoriquement impossible, du point de vue de notre construction d'établir l'inclusion $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.
Rien n'est perdu pour autant comme on va le voir.

A Plongement de l'addition

Montrons que la somme de deux entiers relatifs est la même que ceux-ci soient considérés comme des éléments de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$.

Théorème 27

L'application $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}$, $n\mapsto\dfrac{n}{1}$ est un morphisme injectif de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Q},+)$.

Preuve

Soient n et m deux entiers relatifs.

On a : $f(n+m)=\dfrac{n+m}{1}=\dfrac{n}{1}+\dfrac{m}{1}=f(n)+f(m)$.

L'égalité : $\dfrac{n+m}{1}=\dfrac{n}{1}+\dfrac{m}{1}$, montre qu'ajouter les entiers relatifs n et m revient à ajouter les rationnels n et m et donne dans les deux cas le même résultat.

Donc f est bien un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Q},+)$.

Puis, $f(n)=f(m)\Rightarrow\dfrac{n}{1}=\dfrac{m}{1}\Rightarrow n=m$.

Donc f est injective. □

Le rationnel $\dfrac{0}{1}$ se notera 0 et le rationnel $\dfrac{1}{1}$ se notera 1.

Plus généralement, pour tout entier relatif n, on note $n=\dfrac{n}{1}$.

B Plongement de la multiplication

Montrons que le produit de deux entiers naturels est le même que ceux-ci soient considérés comme des éléments de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$.

Théorème 28

L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ n \mapsto \dfrac{n}{1} \end{array}$ est un morphisme injectif de $(\mathbb{Z}, \times)$ dans $(\mathbb{Q}, \times)$.

Preuve

Soient n et m deux entiers naturels.

On a : $f(nm) = \dfrac{n \times m}{1} = \dfrac{n}{1} \times \dfrac{m}{1} = f(n)f(m)$.

Donc f est bien un morphisme de $(\mathbb{Z}, \times)$ dans $(\mathbb{Q}, \times)$.

L'injectivité de f s'établit comme plus haut. □

De même, l'égalité :
$$\frac{n \times m}{1} = \frac{n}{1} \times \frac{m}{1},$$
montre que multiplier les entiers relatifs n et m revient à multiplier les rationnels n et m et donne dans les deux cas le même résultat.

C Plongement de la relation d'ordre

Montrons enfin que deux entiers relatifs et les deux rationnels auxquels ils sont « égaux » sont rangés dans le même ordre.

Théorème 29

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, n \leqslant m \Leftrightarrow \frac{n}{1} \leqslant \frac{m}{1}.$$

Notez que comme pour l'addition et la multiplication, la relation d'ordre $\leqslant$ n'est pas théoriquement la même si on la considère dans $\mathbb{Z}$ (membre de gauche dans l'équivalence) ou si on la considère dans $\mathbb{Q}$ (membre de droite de l'équivalence).
Bien heureusement, avec les différents plongements, il n'y a pas à faire de distinctions.

Preuve

Soient n et m deux entiers relatifs.

On dispose des équivalences suivantes : $n \leqslant m \Leftrightarrow n - m \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{n-m}{1} \leqslant \dfrac{0}{1} \Leftrightarrow \dfrac{n}{1} - \dfrac{m}{1} \leqslant \dfrac{0}{1} \Leftrightarrow \dfrac{n}{1} \leqslant \dfrac{m}{1}$. □

Les exercices du chapitre 11

1 Démonstrations supplémentaires du cours

Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$.

2 Démonstrations supplémentaires du cours

1) Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, -\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b} .$$

2) Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \frac{a}{b}=\frac{-a}{-b} .$$

3 Démonstrations supplémentaires du cours

Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \forall \beta \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, \alpha < \beta n$.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ est archimédien.

4 ★ Divisibilité

Trouver les entiers relatifs n tels que :

$$1)\ 3n+4 \mid 11n+8 \qquad 2)\ n^2+3n-2 \mid n^2-6 .$$

5 PGCD

Déterminer le PGCD des entiers naturels de l'ensemble :

$$\{16^n+10^n-1, n \in \mathbb{N}^*\} .$$

6 ★ Equation diophantienne

1) Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, a^2 \mid b^2 \Leftrightarrow a \mid b .$$

2) En déduire que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}^*, \alpha^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z} .$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation d'inconnue (x,y) :

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3 .$$

7 ★★ PGCD

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b des entiers naturels non nuls tels que $a \neq b$.

Montrer que :

$$\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) \wedge (a-b) = (n(a\wedge b)^{n-1}) \wedge (a-b) .$$

8 ★★ Nombres rationnels

Soit $(a,b,x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ tel que :

$$\begin{cases} y-2x-a=0 \\ y^2-xy+x^2-b=0 \end{cases} .$$

Montrer que x et y sont des entiers relatifs.

On pourra utiliser l'exercice 6.

9 ★★ Divisibilité

Soient n un entier naturel non nul, a, b, c et d des entiers relatifs tels que l'on ait :

$$n \mid ac\ ,\ \ n \mid ad+bc \ \text{ et } \ n \mid bd .$$

Montrer que :

$$n \mid bc \ \text{ et } \ n \mid ad .$$

On pourra utiliser l'exercice 6.

10 ★★ Entiers relatifs

Montrer que : $x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0 \Rightarrow x=y=z=0$.

11 Identité de Catalan

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$.

12 Suite de Fibonacci

Soit ϕ la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} \phi_0=0, \phi_1=1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n \end{cases} .$$

Calculer, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_{k+1}}{\phi_k\phi_{k+2}} .$$

13 ★ Nombres rationnels

Soit S une partie de $\mathbb{Q}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in S^2, \begin{cases} x+y \in S \\ xy \in S \end{cases} ,\ 0 \in S \ \text{ et : } \forall r \in \mathbb{Q}^*, (r \in S) \vee (-r \in S) .$$

Le symbole « $\vee$ » désigne un « ou exclusif ».

Montrer que $S=\mathbb{Q}_+$.

14 ★★ Nombres rationnels

1) A partir de la soustraction, de l'inverse et des entiers 0 et 1, retrouver les quatre opérations $+, -, \times$ et $\div$ dans $\mathbb{Q}$.

2) A partir d'une seule loi de composition interne et des entiers 0 et 1, retrouver les quatre opérations $+, -, \times$ et $\div$ dans $\mathbb{Q}$.

15 ★★ Ordre total sur Q

Montrer que le seul ordre total sur $\mathbb{Q}$ compatible avec sa structure de corps est l'ordre usuel.

16 ★★ Comme aux olympiades !

Soient a, b et c des entiers relatifs impairs.

Montrer que l'équation d'inconnue x :

$$ax^2+bx+c=0 ,$$

n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$.

Question posée de mon ancien professeur de mathématiques en première S (2009).

17 ★★ Equation rationnelle

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{Q}$:

$$x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0 \ \ (*) .$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier n, pour que l'équation $(*)$ admette au moins une solution.

18 Equation diophantienne

Résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation d'inconnue (x,y,z) :

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1 .$$

19 Nombres rationnels

Soit n un entier relatif.

Montrer que les nombres $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n+2}{4}$ ne sont pas des entiers.

20 ★ Nombres rationnels

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}, \dfrac{n^2+1}{n^3-n} \notin \mathbb{N}$.