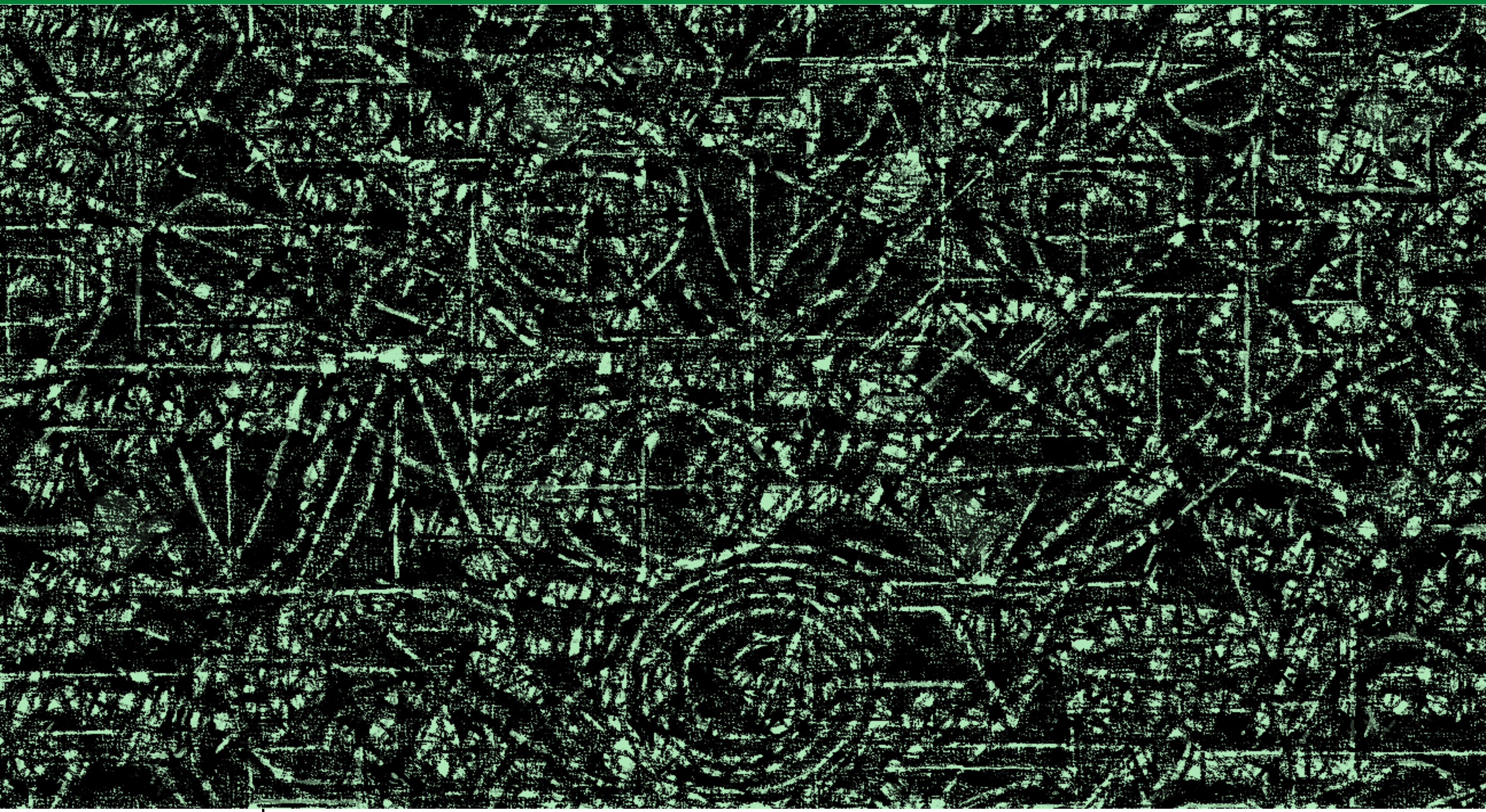
Inégalités classiques
Equations et inéquations

3



Introduction

L'activité principale de l'analyse est d'effectuer des majorations. De ce fait, les inégalités offrent une multitude d'occasions pour en effectuer.

Parmi ces inégalités, la plus importante est celle affirmant que le carré de tout nombre réel est positif. L'**inégalité triangulaire** est aussi très importante comme d'autres que nous verrons dans ce chapitre.

Il s'agit de l'assertion bien connue : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

Une autre partie de ce chapitre traite des équations et des inéquations déjà bien connues depuis le collège.

Prérequis

- Nombres réels (**chapitre 1**)
- Racines n-ièmes (**chapitre 2**)

Objectifs du chapitre

- Etablir les inégalités usuelles
- Revoir les équations du premier degré à une inconnue
- Revoir les inéquations du premier degré à une inconnue
- Revoir les équations du second degré à une inconnue
- Revoir les inéquations du second degré à une inconnue
- Revoir les systèmes d'équations et d'inéquations

Le cours du chapitre 3

1 Inégalités classiques

Les inégalités de ce paragraphe sont à connaître par cœur.

A Avec les identités remarquables

Il s'agit pour x et y des nombres réels, des deux égalités suivantes :
1) $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$;
2) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

Théorème 1

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Preuve

Puisque $(x-y)^2 \geqslant 0$, on a $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, puis $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$. □

Théorème 2

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Preuve

Puisque $(x-y)^2 \geqslant 0$, on a $(x-y)^2 + 4xy \geqslant 4xy$, soit $x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy$, soit encore $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.

Ainsi, $xy \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{4}$, c'est-à-dire $xy \leqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$. □

Le **théorème 3** est très utile.

Théorème 3

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Preuve

Une autre méthode plus élémentaire consiste à étudier le signe de la différence $x + \dfrac{1}{x} - 2$.

Par un calcul direct, on a : $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \dfrac{1}{x} - 2$ et donc $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$. □

Remarque

De ce qui précède, on dispose du théorème suivant : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$.

B Avec des puissances entières

Jacques Bernoulli (1654-1705) était un mathématicien suisse.

Théorème 4 **Inégalité de Bernoulli**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Preuve

L'inégalité est claire quand $n=0$ ou lorsque $x=0$.

Les termes de la somme sont tous positifs et on a majoré par la somme des deux premiers termes (les indices correspondant à $k=0$ et $k=1$).

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, par le **binôme de Newton**, on a : $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx$. □

Une autre majoration est déjà connue : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \leqslant n^n$.

Théorème 5

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

La démonstration est plus technique.

Preuve

On va d'abord démontrer que : $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, k(n+1-k) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

Puisque $(n+1-2k)^2 \geqslant 0$, on a $(n+1)^2 - 4k(n+1) + 4k^2 \geqslant 0$, soit $(n+1)^2 \geqslant 4k(n+1-k)$.

Cette dernière inégalité entraîne alors que $k(n+1-k) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

Enfin, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $1 \leqslant n+1-k \leqslant n$ et donc $k(n+1-k) \geqslant 0$, ce qui entraîne que :

Utilisation du **théorème 11** du **chapitre 1**.

$$\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 .$$

Changement de variable par inversion.

D'une part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} (n+1-k) = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 = (n\,!)^2$.

D'autre part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$.

Finalement, $(n\,!)^2 \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$, soit $\sqrt{(n\,!)^2} \leqslant \sqrt{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}}$, soit encore $n\,! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n}$. □

Remarque

De ce qui précède, on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n\,!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.

C Avec des racines n-ièmes

Le **théorème 6** a fait l'objet de l'**exercice 8** du chapitre précédent.

Théorème 6

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} .$$

Remarque

De ce qui précède, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

Le **théorème d'encadrement** (appelé aussi « **théorème des gendarmes** ») a été étudié en terminale et sera revu dans le **chapitre 6**.

Ceci permettra d'affirmer, via le **théorème d'encadrement** que la suite $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Théorème 7

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n\,!} .$$

Preuve

On va montrer d'abord que : $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, k \leqslant n \Rightarrow n \leqslant k(n+1-k)$.

Supposons que $1 \leqslant k \leqslant n$.

On a alors $(n-k)(k-1) \geqslant 0$, soit $kn - n - k^2 + k \geqslant 0$, soit encore $n \leqslant k(n+1-k)$.

Enfin, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $1 \leqslant n+1-k \leqslant n$ et donc $k(n+1-k) \geqslant 0$, ce qui entraîne que :

$$\prod_{k=1}^{n} n \leqslant \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) .$$

D'une part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n = n^n$ et d'autre part, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n\,!)^2$ (vu précédemment).

Finalement, $n^n \leqslant (n\,!)^2$, soit $\sqrt[2n]{n^n} \leqslant \sqrt[2n]{(n\,!)^2}$, soit encore (**théorème 12** du **chapitre 2**) $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n\,!}$. □

Remarque

Le théorème précédent, permet d'affirmer, via un théorème de comparaison que la suite $(\sqrt[n]{n\,!})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,!} = +\infty$.

D Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** fait partie des inégalités les plus classiques en analyse. On la rencontre aussi dans d'autres situations (avec les intégrales et même en géométrie).

Le **théorème 8** est très important pour la suite du cours.
Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) était un mathématicien allemand.

Théorème 8 — Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les nombres réels

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Une autre démonstration plus élégante est proposée dans l'**exercice 4**.

Preuve

Somme de carrés de nombres réels.

Il est clair que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) x_j - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) y_j\right)^2 \geqslant 0$.

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) x_j - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) y_j\right)^2 &= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2 x_j^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) x_j y_j + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 y_j^2\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Changement d'indice dans tous les termes de la somme (passage de j à i).

Il y a deux cas à traiter.

Cela entraîne que tous les y_i sont nuls.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$, alors l'inégalité à démontrer devient évidente.

Sinon, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \neq 0$, alors $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$. □

Remarque

L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** peut être démontrée plus rapidement en remarquant que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0.$$

L'égalité peut se justifier par récurrence sur n.

E Inégalité de Minkowski

Hermann Minkowski (1864-1909) était un mathématicien allemand.

Théorème 9 — Inégalité de Minkowski pour les nombres réels

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Preuve

On a par l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant |x|$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) &\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \ .$$

□

F Inégalités des moyennes

La notion de moyenne est bien connue depuis le collège. Savez-vous qu'il en existe plusieurs types ?

Définition 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

On appelle **moyenne arithmétique** des nombres $a_1, \dots, a_n$ le nombre $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Remarque

La moyenne arithmétique des nombres $a_1, \dots, a_n$ sera notée $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$.

Par exemple, pour a et b des nombres réels positifs, on a $\mathcal{A}(a, b) = \dfrac{a+b}{2}$.

Définition 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

On appelle **moyenne géométrique** des nombres $a_1, \dots, a_n$ le nombre $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i}$.

Remarque

La moyenne géométrique des nombres $a_1, \dots, a_n$ sera notée $\mathcal{G}(a_1, \dots, a_n)$.

Par exemple, pour a et b des nombres réels positifs, on a $\mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab}$.

Définition 3

Attention, les nombres réels sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

On appelle **moyenne harmonique** des nombres $a_1, \dots, a_n$ le nombre $\dfrac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}}$.

Remarques

1. La moyenne harmonique des nombres $a_1, \dots, a_n$ sera notée $\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)$.

Par exemple, pour a et b des nombres réels strictement positifs, on a $\mathcal{H}(a, b) = \dfrac{2ab}{a+b}$.

2. Le lecteur pourra remarquer que $\mathcal{H} = \dfrac{\mathcal{G}^2}{\mathcal{A}}$, et donc $\mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{H}}$.

Définition 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

On appelle **moyenne quadratique** des nombres $a_1, \dots, a_n$ le nombre $\sqrt{\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

Le cours du chapitre 3

Remarque

La moyenne quadratique des nombres $a_1, \dots, a_n$ sera notée $\mathcal{Q}(a_1, \dots, a_n)$.

Par exemple, pour a et b des nombres réels positifs, on a $\mathcal{Q}(a, b) = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

Théorème 10

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Preuve

1) De l'inégalité $(a-b)^2 \geqslant 0$, on a $(a-b)^2 + 4ab \geqslant 4ab$, soit $a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab$, soit $ab(a+b)^2 \geqslant 4a^2b^2$, soit encore, parce que les deux membres de la dernière inégalité sont positifs, $\sqrt{ab}(a+b) \geqslant 2ab$.

Comme a et b sont non nuls, leur somme est aussi non nulle.

Il vient donc que $\dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$.

2) L'inégalité $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ est une conséquence immédiate du **théorème 2**.

3) De l'inégalité $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, on a $4(a^2 + b^2) \geqslant 2(a+b)^2$, soit $\dfrac{(a+b)^2}{4} \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, soit encore $\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. □

Le **théorème 11** peut être démontré facilement en utilisant la convexité (**chapitre 13**).
La démonstration proposée ci-contre est historiquement dédiée à Cauchy.

Théorème 11 **Inégalité arithmético-géométrique**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Preuve

Remarquons que l'inégalité est évidente si l'un des nombres réels $a_1, \dots, a_n$ est nul.

Dans ce cas, le membre de gauche devient nul.

On suppose désormais qu'ils sont tous nuls.

On va utiliser le **principe de récurrence de Cauchy** qui a déjà été traité dans l'**exercice 42** du **chapitre 7** du livre Algèbre Licence 1.

Autrement dit, en notant pour tout entier naturel n, $P(n)$ le prédicat « $\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ », on va montrer que :

$P(2)$ est vrai ;

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n+1) \Rightarrow P(n)$;

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \Rightarrow P(2n)$.

On sait déjà via le **théorème 10** que $P(2)$ est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que :

$$\forall (a_1, \dots, a_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}, \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Posons $a_{n+1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Il est clair que $a_{n+1} > 0$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sqrt[n+1]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i$.

De plus, $(n+1)a_{n+1} = na_{n+1} + a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$, donc $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i$.

Rappelons que $a_{n+1} > 0$.

Ainsi, $\sqrt[n+1]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \leqslant a_{n+1}$, soit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i \leqslant a_{n+1}^{n+1}$, soit en divisant par a_{n+1}, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant a_{n+1}^{n}$, soit enfin $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant a_{n+1}$.

Donc $P(n)$ est vrai.

Il vient alors que $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Le cours du chapitre 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \,.$$

Soit $(a_1, \ldots, a_{2n}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$.

On a $\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i} = \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i}} = \sqrt{\sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)}} = \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}}$.

Donc, en utilisant le **théorème 10**, $\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i} \leqslant \dfrac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}}{2}$.

On a $2n-(n+1)+1 = n$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux nombres $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i$.

Donc $P(2n)$ est vrai.

Ainsi, $\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i} \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i$. □

Théorème 12 **Inégalité harmonico-géométrique**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \,.$$

Preuve

On applique le **théorème 12** aux nombres réels $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.

Ainsi, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_i}$, soit $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}}$, soit $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$. □

Théorème 13 **Inégalité arithmético-quadratique**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \,.$$

Preuve

En appliquant l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** aux n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(1, \ldots, 1)$ on a $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) n$.

Puis, en divisant par n^2, on a $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, soit par positivité des nombres, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$. □

Remarque
De tout ce qui précède, on a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathcal{Q}(x_1, \ldots, x_n) \,.$$

2 Equations algébriques

A Qu'est-ce une équation ?

Déterminons l'ensemble S des nombres réels x tels que $\sqrt{x} = x$. Autrement dit, on veut déterminer l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} = x\}$$

en extension.

On dit alors qu'on cherche à **résoudre l'équation** d'inconnue x dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} = x$.

Tout nombre réel appartenant à S est appelé **solution** (de l'équation). Par exemple, 1 est une solution de l'équation.

On suppose donc que $x \in S$.

Soit alors x une solution de cette équation.

On dispose des implications suivantes : $\sqrt{x} = x \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x \in \{0,1\}$.

Puis, il est clair que 0 et 1 sont des solutions de l'équation.

On a raisonné par analyse-synthèse.

Au final, $S \subset \{0,1\}$ et $\{0,1\} \subset S$, donc $S = \{0,1\}$.

On peut aussi procéder directement par équivalence, mais attention :

En pratique, il ne sera pas nécessaire de développer autant les étapes.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \in \{0,1\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0,+\infty[\cap \{0,1\} \Leftrightarrow x \in \{0,1\}.$$

B Equation du premier degré à une inconnue

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.

On s'intéresse à l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$: $ax + b = 0$.

Il est clair qu'une telle équation admet une unique solution : $-\dfrac{b}{a}$.

C Equation du second degré à une inconnue

Les équations du second degré à une inconnue dans $\mathbb{C}$ sont vues dans le **chapitre 5** des nombres complexes.
Une étude complète de ces équations est reprise dans le **chapitre 10**.

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$.

On s'intéresse à l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$: $ax^2 + bx + c = 0$.

On dispose des équivalences suivantes : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$
$$\Leftrightarrow (2ax+b)^2 + 4ac = b^2$$
$$\Leftrightarrow (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Suivant le signe de $b^2 - 4ac$, appelé **discriminant** qu'on notera Δ, il y a deux situations :

- $\Delta \geqslant 0$: $(2ax+b)^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + b = \sqrt{\Delta} \\ \text{ou} \\ 2ax + b = -\sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.

- $\Delta < 0$: aucune solution réelle.

3 Inéquations algébriques

A Qu'est-ce qu'une inéquation ?

Cherchons l'ensemble des nombres réels x tels que $\sqrt{x} \geqslant x$.

Notons S l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \geqslant x\}$. Si possible, cherchons à déterminer cet ensemble en extension. On dit alors qu'on cherche à **résoudre l'inéquation** d'inconnue x dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} \geqslant x$.

Par équivalence, on a :

Les inéquations se résolvent en général par équivalence.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in S \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x(1-x) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \in [0,1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0,+\infty[\cap [0,1] \Leftrightarrow x \in [0,1].$$

Ainsi, $S = [0,1]$.

B Inéquation du premier degré à une inconnue

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.

Les justifications sont immédiates.

On dispose des équivalences suivantes quand $a > 0$: $ax + b \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{b}{a}$ et $ax + b \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{b}{a}$.

Quand $a < 0$: $ax + b \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{b}{a}$ et $ax + b \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{b}{a}$.

Il est possible de représenter ces situations par un **tableau de signes**. Mais attention, un tel tableau n'a aucune valeur de justification.

Le cours du chapitre 3

C Inéquation du second degré à une inconnue

Soient a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$.

Pour tout réel x, notons $T(x) = ax^2 + bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Etudions le signe de T suivant les valeurs de x.

Rassemblons sans démonstration, les résultats vus en classe de première (ils sont démontrés dans le **chapitre 10**).

- Cas où $\Delta > 0$.

Si $x_1 = x_2$, alors $\Delta = 0$.

Notons x_1 et x_2 les deux solutions (distincts) de l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$: $T(x) = 0$.

On suppose ici que $x_1 < x_2$.

Quand $a > 0$, on a : $\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[, T(x) > 0$ | $\forall x \in]x_1, x_2[, T(x) < 0$.

Quand $a < 0$, on a : $\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[, T(x) < 0$ | $\forall x \in]x_1, x_2[, T(x) > 0$.

- Cas où $\Delta = 0$.

Quand $a > 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) \geqslant 0$.

Quand $a < 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) \leqslant 0$.

- Cas où $\Delta < 0$.

Quand $a > 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) > 0$.

Quand $a < 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) < 0$.

Les exercices du chapitre 3

1 Démonstration supplémentaire de cours

Etudier le cas d'égalité du **théorème 3**.

2 ★ Démonstration supplémentaire de cours

Etudier le cas d'égalité de l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

3 Binôme de Newton

Montrer via le **binôme de Newton** que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

On pose :

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ , \ B = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ \text{ et } \ C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \lambda + y_i)^2 \ .$$

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, exprimer $f(\lambda)$ en fonction de A, B, C et λ .

2) En déduire l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

5 ★ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Démontrer l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** par récurrence.

6 Combinaison

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dbinom{2n}{n} \leqslant 4^n$.

7 Inégalités de Weierstrass

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, ..., a_n) \in [0,1]^n, \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, ..., a_n) \in [0,1]^n, \sum_{k=1}^{n} a_k < 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \leqslant \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} a_k} \ .$$

8 ★ Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \ .$$

9 Système d'équations

Montrer que le système d'équations :

$$\begin{cases} x = 2 - y^3 \\ y = 2 - x^3 \end{cases} ,$$

d'inconnu (x, y) admet dans $\mathbb{R}^2$ le couple $(1,1)$ comme seule solution.

10 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} = 1 \ .$$

11 ★ Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations d'inconnu (x, y) :

$$\begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases} .$$

12 Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation d'inconnue (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 + 4yz + 2z = 0 \\ x + 2xy + 2z^2 = 0 \\ 2xz + y^2 + y + 1 = 0 \end{cases} .$$

13 Equation

Soient a et b deux nombres réels non nuls.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} \ .$$

14 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x \ .$$

15 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \ .$$

16 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{17+8x-2x^2} + \sqrt{4+12x-3x^2} = x^2 - 4x + 13 \ .$$

17 ★ Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt[4]{8+x} + \sqrt[4]{9-x} = 3 \ .$$

18 ★★ Système d'équations

Soient a et b deux nombres réels positifs.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations d'inconnu (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases} .$$

19 Equation paramétrique

Soit m un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x^2 + mx - 1} = 3m - x \ .$$

20 ★ Equation paramétrique

Soit m un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = m \ .$$

21 ★ Equation paramétrique

Soit m un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x^2 - m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x \ .$$

22 Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations d'inconnu (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + y = z \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z} \end{cases} .$$

Les exercices du chapitre 3

23 Equation paramétrique

Soit m un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$(m+1)x^2 + mx + 1 - m = 0 .$$

24 Equation paramétrique

Soit m un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$(m-2)x^2 + (1-2m)x + m - 3 = 0 .$$

25 Equation paramétrique

Soit m un nombre réel.

Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[4]{x^4 + x^2 + m} = x - 1 .$$

26 Inéquation du premier degré à une inconnue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x + 9 .$$

27 Inéquation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{3+x} > 1 .$$

28 Inéquation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2 .$$

29 Application

Trouver un exemple d'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il n'existe pas de couple (g, h) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = g(x) + h(y) .$$

30 Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations d'inconnu (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 + 2yz = x \\ y^2 + 2zx = y \\ z^2 + 2xy = z \end{cases} .$$

31 Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations d'inconnu (x, y, z) :

$$\begin{cases} xz + y = 7z \\ yz + x = 8z \\ x + y + z = 12 \end{cases} .$$

32 ★ Equation du second degré à trois inconnues

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation d'inconnue (x, y, z) :

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y+z) .$$

33 ★ Equation du second degré à trois inconnues

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation d'inconnue (x, y, z) :

$$3x^2 + 4y^2 + 18z^2 - 4xy - 12xz = 0 .$$

34 ★ Système d'équations

Résoudre dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$ le système d'équations d'inconnu (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3 \end{cases} .$$

35 Système d'équations

Montrer que : $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ xz = yt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 2 \\ y^2 + t^2 = 2 \\ xy = zt \end{cases} .$

36 Nombres réels

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 \Rightarrow x_1 = ... = x_n$.

37 Produit de nombres réels

Soient n un entier naturel et x un nombre réel différent de 1 :

1) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (x^{2^k} + 1) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}$ 2) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (x^{2\cdot 3^k} + x^{3^k} + 1) = \frac{x^{3^{n+1}} - 1}{x - 1}$.

38 ★ Inégalité

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{4} > 0$.

39 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a^3 + b^3 + 2 \geqslant 2ab + a + b .$$

40 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (n-1)a^n + b^n \geqslant na^{n-1}b .$$

41 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc .$$

42 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3, abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) .$$

43 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3, a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a .$$

44 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, abc(a+b+c) \leqslant a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4 .$$

45 Inégalité

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3, \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} .$$

Les exercices du chapitre 3

46 ★ **Inégalité**

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\ \frac{3}{1+abc}\leqslant\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\,.$$

47 ★★ **Inégalité**

Montrer l'inégalité suivante et étudier le cas d'égalité :

$$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\,.$$

48 ★ **Inégalité**

Soient x, y et z des nombres réels tels que :

$$x+y+z=5 \text{ et } xy+yz+zx=3\,.$$

Montre que $-1\leqslant z\leqslant\dfrac{13}{3}$.

49 ★ **Inégalité**

Soient x, y et z des nombres réels strictement positifs.

On pose :

$$\alpha=a+\frac{1}{b},\ \beta=b+\frac{1}{c} \text{ et } \gamma=c+\frac{1}{a}\,.$$

Montrer que $\mathrm{Max}(\alpha,\beta,\gamma)\geqslant 2$.

50 **Inégalité** 🖫

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$.

1) Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}a_i\,.$$

2) Etudier le cas d'égalité.

51 **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)\in[1,+\infty[^n$.

1) Montrer que :

$$n+\prod_{i=1}^{n}a_i\geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}a_i\,.$$

2) Etudier le cas d'égalité.

On pourra utiliser l'exercice 50.

52 **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)\in[1,+\infty[^n$.

Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geqslant\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

On pourra utiliser l'exercice 50.

53 ★ **Inégalité**

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1[\cup]1,+\infty[,\ \dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}\geqslant(2n+1)x^n$.

54 **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)\in[1,+\infty[^n$.

Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\leqslant 2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n}a_i\right).$$

55 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\right)^2>2n+3$.

56 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}<\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}$.

57 ★ **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\geqslant(n+1)^2\,.$$

58 **Equation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}\,.$$

59 **Equation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt[4]{313+x}+\sqrt[4]{313-x}=6\,.$$

60 **Système d'équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations d'inconnu (x,y) :

$$1)\ \begin{cases}x^2+xy+y^2=1\\(x-y)^2=x+y\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}x+y+\sqrt{x+y}=56\\x-y+\sqrt{x-y}=30\end{cases}.$$

61 ★ **Système d'équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations d'inconnu (x,y,z) :

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=49\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\\x-y+z=1\end{cases}.$$

62 ★ **Equation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation d'inconnue (x,y,z) :

$$\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+3\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z+11)\,.$$

63 **Système d'équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système d'équations d'inconnu (x,y,z,t) :

$$\begin{cases}x<y\\z<t\\x^2+y^2=z^2+t^2\\x+y+z+t=0\end{cases}.$$

64 **Système d'équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ l'équation d'inconnue (x,y,z,t) :

$$x+yzt=y+ztx=z+txy=t+xyz=2\,.$$

65 **Inégalité**

Montrer que : $\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+)^3, (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geqslant 8abc$.

Les exercices du chapitre 3

66 ★ **Inégalité**

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n, \displaystyle\sum_{k=1}^n k a_k^2 \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$.

67 ★ **Inégalité**

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n, \displaystyle\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=i}^n a_j} \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n i^2 a_i}$.

68 **Inégalité**

Soient x, y et z des nombres réels positifs.
Montrer que :
1) $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geqslant 6xyz$ 2) $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$.

69 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n, \dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\dots+\dfrac{a_n}{a_1}\geqslant n$.

70 **Inégalité**

Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que :
1) $(n+1)^n\geqslant 2^n n!$ 2) $(n+1)^n(2n+1)^n\geqslant 6^n(n!)^2$.

71 **Inégalité**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$E(\sqrt{x})=E\left(\frac{x}{2}\right).$$

72 **Système d'équations**

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système d'équations d'inconnu (x,y,z,w) :

$$\begin{cases} x+y+z=w \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w} \end{cases}.$$

73 **Equation fonctionnelle**

Soit X un ensemble non vide.
Trouver toutes les applications $f : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall(x,y,z)\in X^3, f(x,z)=f(x,y)+f(y,z).$$

74 **Inégalité**

Soient a et b deux nombres réels.
Montrer que :
1) $a+b<2+a^2+b^2$ 2) $a+b<(1+a^2)(1+b^2)$.

75 **Inégalité**

Soient a, b et c des nombres réels positifs.
Montrer que l'un au moins des trois nombres réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

76 **Inégalité**

Montrer que : $\forall(x,m)\in\mathbb{R}^2, x\geqslant m \Rightarrow \sqrt{1+x^2}\leqslant 1+2|m|+x$.

77 **Inégalité**

Montrer que : $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}0\leqslant a\leqslant b\\ 0<c\end{cases} \Rightarrow \sqrt{b}-\sqrt{a}\leqslant\dfrac{1}{c}(b-a)+c$.

78 **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, a\leqslant b\Rightarrow \frac{1}{8}\cdot\frac{(b-a)^2}{b}\leqslant\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{8}\cdot\frac{(b-a)^2}{a}.$$

79 **Inégalité**

Montrer que : $\forall(a,b,x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^4, a+b\geqslant 1\Rightarrow \dfrac{1}{\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}}\leqslant ax+by$.

80 **Inégalité**

Montrer que : $\forall(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+)^3, 9abc\leqslant(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

81 **Inégalité**

1) Montrer que :
$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2, \forall\lambda\in[0,1], \sqrt{\lambda a+(1-\lambda)b}+\sqrt{(1-\lambda)a+\lambda b}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
2) Etudier le cas d'égalité.

82 **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+)^3, \mathrm{Inf}((b-c)^2,(c-a)^2,(a-b)^2)\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

83 **Inégalité et partie entière**

Soient n un entier naturel non nul et $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels de l'intervalle $[-1,1]$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n x_i=0.$$

Montrer que :

$$\left|\sum_{i=1}^n i x_i\right|\leqslant E\left(\frac{n^2}{4}\right).$$

84 **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$.
Montrer que :

$$\mathrm{Inf}\left(\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right)\leqslant\frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n}\leqslant\mathrm{Sup}\left(\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right).$$

85 **Inégalité** 🖫

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n, \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)\geqslant n^2$.

86 **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ et $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a<b$.
Montrer que :

$$n(b-a)a^{n-1}\leqslant b^n-a^n\leqslant n(b-a)b^{n-1}.$$

87 **Inégalité**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in[0,1]^n$.
Montrer que l'un au moins des deux produits $\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^n(1-x_i)$ est inférieur ou égal à 2^{-n} .

Les exercices du chapitre 3

88 **Racines n-ièmes**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \left|\sqrt[n]{|a|} - \sqrt[n]{|b|}\right| \leqslant \sqrt[n]{|a-b|}$.

89 **Inégalité**

1) Montrer que :

$$\forall (\lambda,\mu) \in [0,1[^2, \forall c \in [0,+\infty[, \frac{\lambda}{1-\lambda} + \frac{\mu c}{1-\mu} \geqslant \frac{(1+c)(\lambda+\mu c)}{1-\lambda+(1-\mu)c} .$$

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

2) En déduire que :

$$\forall (\alpha,\beta) \in [0,a[\times[0,b[, \frac{a\alpha}{a-\alpha} + \frac{b\beta}{b-\beta} \geqslant \frac{(a+b)(\alpha+\beta)}{(a+b)-(\alpha+\beta)} .$$

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n) \in [0,1[^2, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-a_i} \geqslant \frac{n\sum_{i=1}^{n} a_i}{n - \sum_{i=1}^{n} a_i} .$$

90 **Inégalité** 🖫

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

91 **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}, \frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} .$$

92 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

93 **Inégalité**

1) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 8 \Rightarrow 2^n > 18(n+1) .$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 8 \Rightarrow 2^x > 18x .$$

2) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6 \Rightarrow 2^n > 6(n+1) .$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 6 \Rightarrow 2^x > 6x .$$

94 ★★ **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

On note :

$$a = \operatorname*{Inf}_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i),\ b = \operatorname*{Inf}_{1\leqslant i\leqslant n}(b_i),\ A = \operatorname*{Sup}_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i) \text{ et } B = \operatorname*{Sup}_{1\leqslant i\leqslant n}(b_i) .$$

Montrer que :

$$1 \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{ab}{AB}} + \sqrt{\frac{AB}{ab}}\right)^2 .$$

95 **Inégalité**

Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a+b+c)^2 \leqslant 4a^2+4b^2+2c^2$.

96 ★★ **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \text{ et } b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n .$$

1) Montrer que :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3, (a+b+c)^n \leqslant 3^{n-1}(a^n+b^n+c^n) .$$

97 ★★ **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$a_n \leqslant \ldots \leqslant a_1 \text{ et pour tout } k \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_i .$$

Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

98 ★★ **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Montrer que :

$$\exists i \in \{1,\dots,n\}, (a_{i+1}-a_i)^2 \leqslant \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 .$$

99 ★★ **Permutation**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $0 < a_1 < \ldots < a_n$.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note :

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)} .$$

Montrer que le minimum de S_σ, lorsque σ décrit $\mathfrak{S}_n$ est atteint en une permutation et une seule que l'on précisera.

100 **Equation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\frac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}} .$$

101 **Equation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} .$$

102 **Equation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sqrt{|x^2-1|} = x-5 .$$

103 **Inéquation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+2} < 0 .$$

104 **Inéquation irrationnelle**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}x \geqslant 0 .$$

Les exercices du chapitre 3

105 Inéquation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :
$$x-\sqrt{2x+3}<0\,.$$

106 Equation avec valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$|x-2|+|x|+|x+2|=6\,.$$

107 Equation avec valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$1)\ |x+1|=2x+1 \qquad 2)\ \sqrt{2x^2+1}=x^2\,.$$

108 Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations d'inconnu (x,y) :
$$\begin{cases}(x-1)(y-2)(x+y)=0\\(x+2)(y+1)(x-y)=0\end{cases}.$$

109 Equation avec partie entière

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$1)\ E(x)=E\left(\frac{3}{2}\right) \qquad 2)\ E(-2x)=E\left(\frac{-1}{2}\right) \qquad 3)\ E(x^2)=3\,.$$

110 Inégalité

Montrer que : $\forall (n,p)\in\mathbb{Z}^2, \forall a\in\mathbb{R}_+^*, a^{n+p}\leqslant\dfrac{a^{2n}+a^{2p}}{2}$.

111 Inégalité

Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, x\geqslant 100\Rightarrow\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{20}$.

112 Inégalité

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $a^2\geqslant b^2+c^2$.

Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}, a^n\geqslant b^n+c^n\,.$$

113 ★ Equation avec partie entière

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$E(3x-\sqrt{2x-1})=1\,.$$

114 Equation et inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations d'inconnue x :
$$1)\ x+|x-1|=1+|x| \qquad 2)\ |x-2|+|x-1|<3$$
$$3)\ 2x^2+|x-1|=|x+1| \qquad 4)\ x^2+|x-1|-|2x+1|<0\,.$$

115 Equation et inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation d'inconnue (x,y) :
$$1)\ |x+2y+1|+|2x+y+1|>0 \qquad 2)\ |x^2+2y-3|+|x+y|>0\,.$$

116 Inégalité

1) Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n\geqslant 2\,.$$

2) En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geqslant 2^{n+1}\,.$$

117 Inégalité

Démontrer que : $\forall (n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2, k\leqslant n\Rightarrow\dbinom{n}{k}\geqslant\dfrac{n^k}{k^k}$.

118 Equation du troisième degré à une inconnue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}\,.$$

119 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}\,.$$

120 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$3x^2-3x-4\sqrt{x^2-x+3}=6\,.$$

121 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$4\sqrt[3]{x}+5\sqrt[4]{x}=9\,.$$

122 Système d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations d'inconnu (x,y) :
$$\begin{cases}x^2+xy+y=3\\y^2+yx+x=-1\end{cases}.$$

123 Inégalité

Montrer que : $\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \dfrac{3a-b}{4}\leqslant\dfrac{a^2}{a+b}$.

124 Inégalité

Montrer que : $\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3, \dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\geqslant\dfrac{a+b+c}{2}$.

125 Equation du quatrième degré à une inconnue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$(x+7)(x-5)(x+4)(x+6)=608\,.$$

126 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$\sqrt[4]{(19-x)(x-2)}+\sqrt{19-x}+\sqrt{x-2}=7\,.$$

127 Equation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$$2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[3]{x}\geqslant\sqrt{x}\,.$$

128 Inégalité

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\right)^2.$$

129 Inégalité

Montrer que : $\forall x\in\,]1,+\infty[, \dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}\geqslant\dfrac{1-x}{2}$.

Les exercices du chapitre 3

130 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}^k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

131 ★★★ **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}, \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geqslant \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{p=1}^{n-1}\frac{p}{n-p}\right)^2$.

D'après lycée Louis-Le-Grand.

132 ★ **Borne supérieure et inférieure**

Déterminer si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :

1) $\left\{\frac{m}{n}+\frac{4n}{m}, (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$ 2) $\left\{\frac{mn}{4m^2+n^2}, (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\right\}$

3) $\left\{\frac{m}{m+n}, (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$ 4) $\left\{\frac{m}{|m|+n}, (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\right\}$

5) $\left\{\frac{mn}{1+m+n}, (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

133 **Inégalité de Bernoulli** 🖫

Démontrer l'**inégalité de Bernoulli** en utilisant l'**inégalité arithmético-géométrique**.

134 **Inégalité** 🖫

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} > \frac{2}{3}$.

135 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k} > 1$.

136 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{3n+k} < \frac{2}{3}$.

137 ★ **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}, n(\sqrt[n]{n+1}-1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right).$$

138 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \displaystyle\frac{x^n}{\sum_{k=0}^{2n} x^k} \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

139 ★★ **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n, \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n$.

140 **Inégalité**

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \geqslant n^2$.

141 ★★ **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ et $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$.

On pose :

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Montrer que :

1) $\displaystyle n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s-a_k}\right)^{-1} \leqslant n-1 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{s-a_k}{a_k}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{s}{s-a_k} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$

3) $\displaystyle n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s+a_k}\right)^{-1} \geqslant n+1$.

142 ★ **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n, \prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 2^n .$$

143 **Inégalité**

Soient $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1 .$$

Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1 .$$

144 **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n, \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{a_k}\right) \geqslant n\sum_{k=1}^{n}(1-a_k) .$$

145 ★ **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

Montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

146 **Inégalité**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant \sqrt{n}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leqslant \sqrt{n}\times\sum_{k=1}^{n}|a_k| .$$

147 **Inégalité**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

Montrer que :

1) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{k}\right)$ 2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^5}\right)$.

148 **Inégalité**

Montrer que : $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, (a+b)^2 \leqslant (1+c)a^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)b^2$.

Les exercices du chapitre 3

149 Comparaison

Comparer les nombres entiers 5^{50}, 3^{75} et 2^{100}.

150 Comparaison

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $b < a$.

On pose :

$$A = \frac{1 + a + ... + a^8}{1 + a + ... + a^9} \text{ et } B = \frac{1 + b + ... + b^8}{1 + b + ... + b^9}.$$

Comparer les nombres A et B.

151 Equation irrationnelle

Soit a un nombre réel strictement positif.

Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x :

$$\sqrt{x + \sqrt{x + a}} = a.$$

D'après oral CCP PC 2006.

152 Inégalité

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \leqslant (n-1) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1 a_2 \right).$$

153 Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que :

$$\left| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

154 ★ Inégalité de Tchebychev (1821-1894) 🖫

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$a_1 \leqslant ... \leqslant a_n \text{ et } b_1 \leqslant ... \leqslant b_n.$$

Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

155 Inégalité 🖫

Montrer que :

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall (a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Tchebychev de l'exercice précédent.

156 Inégalité

Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leqslant |b - c|$.

157 Inégalité

Montrer que : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, a + b + c \leqslant \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c}$.

158 Inégalité

Montrer que : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \dfrac{1}{\sqrt{bc}} + \dfrac{1}{\sqrt{ca}} + \dfrac{1}{\sqrt{ab}} \leqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

159 Inégalité

Montrer que : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \dfrac{9}{a + b + c} \leqslant \dfrac{2}{a + b} + \dfrac{2}{a + c} + \dfrac{2}{b + c}$.

160 Inégalité

Montrer que : $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \dfrac{b^2 - a^2}{a + c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a + b} + \dfrac{a^2 - c^2}{b + c} \geqslant 0$.

161 ★★ Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

On note :

$$M = \text{Max} \left\{ \frac{a_k}{b_k}, k \in [\![1, n]\!] \right\}.$$

Montrer que :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M^{k-1} b_k^k} \leqslant M.$$

162 Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et x un nombre réel tel que :

$$x > \text{Max}(a_1, ..., a_n).$$

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - a_k} \geqslant \frac{n}{x - \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

163 Inégalité 🖫

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{n(2^n - 1)}$.

164 Inégalité

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{2^n - 2}{n - 1} \right)^{n-1}$.

165 ★ Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

On pose :

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

166 ★★ Inégalité

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - a_1|}}{2^k}.$$

167 Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} = n - 1$.

Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant (n-1)^n.$$

Les exercices du chapitre 3

168 Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in]0,1[^n$.

On pose :

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k} \geqslant \frac{na}{n-a} .$$

169 ★ Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

Montrer que :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \geqslant (n+1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k$ 2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1-a_k) \geqslant (n-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k$.

170 ★ Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

Montrer que :

$$\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+a_k)}{(n+1)^n} \geqslant \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1-a_k)}{(n-1)^n} .$$

171 ★★ Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que :

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{n}{4} .$$

172 ★ Inégalité 🖫

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_k} .$$

173 ★★ Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in]0,1]^n$.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \leqslant \frac{n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k + n\prod_{k=1}^{n} a_k} .$$

174 ★★ Inégalité de Kantorovitch (1912-1986) 🖫

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que :

$$0 < a_1 < \dots < a_n \text{ et } p_1 + \dots + p_n = 1 .$$

Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{a_k}\right) \leqslant \left(\frac{\mathcal{A}(a_1,a_n)}{\mathcal{G}(a_1,a_n)}\right)^2 .$$