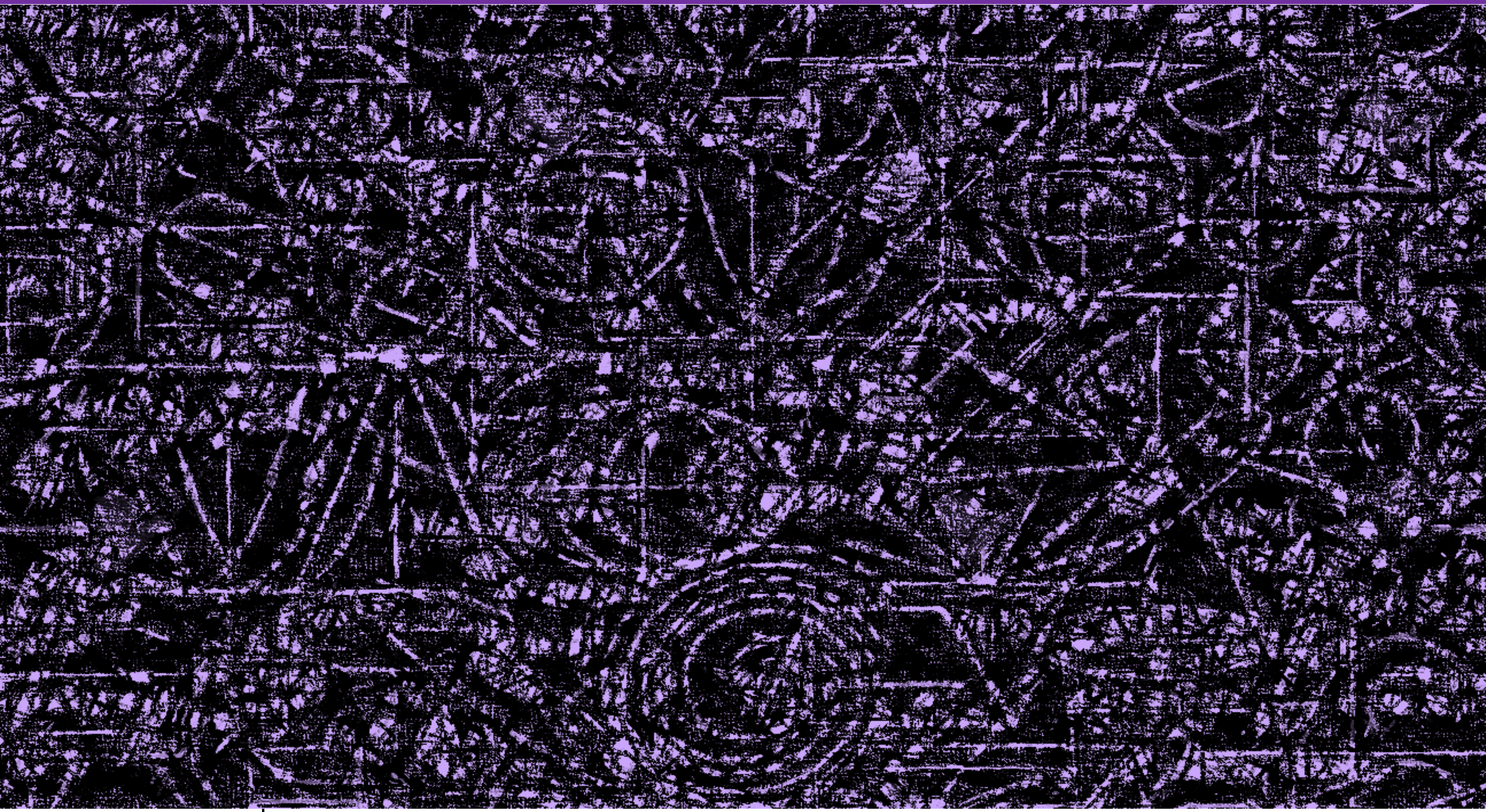
Dénombrements classiques

3



Introduction

L'objectif de ce chapitre est très simple : dénombrer !
Malheureusement, il n'existe pas de méthode générale pour dénombrer tant les techniques sont nombreuses et parfois très astucieuses. C'est un chapitre qui demande clairement de la maturité. L'expérience sera acquise au fur et à mesure du cours et des exercices pratiqués.
Les résultats annoncés dans le cours ne sont pas à connaître par cœur mais il est essentiel de savoir les retrouver.

Prérequis

- Théorie des cardinaux (**chapitre 1**)
- Analyse combinatoire (**chapitre 2**)

Objectifs du chapitre

- Dénombrer avec des arrangements, permutation et combinaison
- Dénombrer dans des équations
- Dénombrer dans la théorie des ensembles
- Dénombrer des relations
- Dénombrer des fonctions
- Dénombrer des applications strictement croissantes
- Dénombrer des surjections
- Dénombrer des structures algébriques

Le cours du chapitre 3

1 Ordre et répétitions

A Ordre sans répétition

Les arrangements sont responsables des situations où l'ordre compte et quand il n'y a pas de répétition.

> Soit une course où 15 chevaux sont en compétition.
> On peut parier sur les noms des trois premiers chevaux en les donnant dans l'ordre.
> **Quel est le nombre de paris possibles à ce tiercé ?**

On peut résoudre cet exercice de deux manières différentes.
La première manière est la plus naturelle :
- il y a 15 manières de choisir le premier cheval ;
- puis 14 manières de choisir le deuxième ;
- puis 13 manières de choisir le dernier cheval.

Bien évidemment, on ne choisit pas à nouveau le cheval choisi juste avant.

Ces choix étant successifs, on multiplie toutes ces possibilités : $15\times14\times13$.

L'autre manière, plus directe, utilise les arrangements : $A_{15}^{3}=\dfrac{15\,!}{12\,!}=\dfrac{12\,!\times13\times14\times15}{12\,!}=13\times14\times15$.

On préférera la première méthode.

En effet, l'ordre compte ici. Si les chevaux sont notés A, B, ..., O, alors le tiercé A-B-F est différents du tiercé F-A-B. Il n'y a pas non plus de répétition car une lettre dans le tiercé doit apparaître qu'une seule fois.

B Ordre avec répétition

Cette situation est très courante.

> On dispose uniquement des 26 lettres de l'alphabet française.
> **Combien de mots de trois lettres peut-on former ?**

Dans ce genre de question, la notion de sens d'un mot n'existe pas. Les mots peuvent donc avoir un sens ou pas.
On résout ce problème de manière intuitive : il y a 26 manières de choisir la première lettre, puis 26 manières pour la deuxième et enfin 26 manières pour la dernière lettre.
Ces choix étant successifs, il y a 26^3 mots possibles composés de trois lettres.

Plus formellement, cela correspond au nombre d'applications d'un ensemble de cardinal 3 dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

Remarque

Si on demandait que les lettres des mots formées soient deux à deux distinctes, le résultat serait A_{26}^{3} puisque l'ordre compte et qu'il n'y a pas de répétition.

La situation où la répétition compte est délicate et sera traitée plus loin.

C Sans ordre et sans répétition

C'est la situation la plus courante en pratique.

Les combinaisons sont responsables des situations où l'ordre ne compte pas et quand il n'y a pas de répétition.

> Des binômes doivent être formés parmi 5 personnes.
> **Combien de binômes peut-on former ?**

L'ordre des binômes n'a évidemment aucune importance. De plus, chaque binôme est composé de deux personnes différentes, ce qui justifie l'utilisation des combinaisons.

Ainsi, il y a $\dbinom{5}{2}$ binômes possibles, c'est-à-dire 10.

On a $\dbinom{5}{2}=\dfrac{5}{2}\times4=10$.

2 Situations concrètes en dénombrement

A Problème d'élection

> Un club de 32 membres (18 hommes et 14 femmes) doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un vice-président nécessairement du sexe opposé à celui du président, d'un(e) secrétaire et d'un gardien nécessairement un homme.
> **Quel est le nombre de bureaux possibles ?**

On pouvait aussi s'occuper du président et du vice-président avant le gardien (on aurait bien sûr trouvé le même résultat à la fin).

On doit donc élire 4 personnes au total.
On commence naturellement à traiter le cas du gardien, parce qu'il y a une contrainte sur ce dernier.
Comme il doit être un homme, il y a en tout 18 possibilités.
Il reste donc, une fois choisi ce gardien, 31 personnes.
Ensuite, deux possibilités s'offrent à nous pour le choix des présidents :
- le président est un homme et la vice-présidente est une femme : 17×14 possibilités ;
- le vice-président est un homme et la présidente est une femme : 17×14 possibilités ;

Il reste ensuite 29 possibilités pour le choix du secrétaire (homme ou femme).
Le nombre de bureaux possibles vaut alors : $18+2\times17\times14+29$, soit 523.

B Problème d'anagramme

Avec les lettres d'un mot, on peut reconstituer un autre mot.
Par exemple, avec le mot « CHIEN », on peut construire le mot « NICHE ». On a en réalité donner une **anagramme** du mot « CHIEN ».

On convient qu'une lettre est une anagramme de lui-même.

Mathématiquement parlant, on a réalisé une permutation de toutes les lettres C-H-I-E-N. Que les mots aient un sens ou pas, il y a $5!$ anagrammes possibles du mot « CHIEN ».
Le problème suivant est intéressant :

On peut aussi raisonner ainsi : 5 possibilités de choisir la première lettre, puis 4 possibilités de choisir la seconde... puis une possibilité de choisir la dernière lettre.

> On considère le mot « MOUTON ».
> **Combien d'anagrammes comporte ce mot ?**

Le sens des mots formés n'a aucune importance.

Contrairement au mot précédent, ce mot possède deux fois la lettre « O ». Le résultat attendu n'est donc pas $6!$.
Pout comprendre comment dénombrer les anagrammes, faisons comme si ce mot comporté six lettres distinctes :

$$\text{MO}_1\text{UTO}_2\text{N}.$$

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des anagrammes du mot « $\text{MO}_1\text{UTO}_2\text{N}$ » et $\mathcal{A}'$ l'ensemble des anagrammes du mot « MOUTON ».
L'application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}'$ qui à un mot de $\mathcal{A}$ associe le même mot mais sans les indices sur les « O » est clairement surjective.

Par exemple, l'image du mot « $\text{O}_2\text{UNO}_1\text{MT}$ », par cette application, est : « OUNOMT ».

De plus, chaque mot de $\mathcal{A}'$ à le même nombre d'antécédent. Par exemple le mot « MOUTON » à deux antécédents, à savoir les mots « $\text{MO}_1\text{UTO}_2\text{N}$ » et « $\text{MO}_2\text{UTO}_1\text{N}$ ». Il y a en fait autant d'antécédents que de permutation des lettres O_1 et O_2, c'est-à-dire 2 ($2!$).
En appliquant le **lemme des bergers**, il vient que $\text{Card}(\mathcal{A})=2!\,\text{Card}(\mathcal{A}')$.

Ainsi $\text{Card}(\mathcal{A}')=\dfrac{6!}{2!}=3\times4\times5\times6=360$.

En pratique, on ne détaillera pas autant la réponse.

Remarque
En pratique, on préfèrera résoudre cet exercice en utilisant les combinaisons.
En effet, considérons les 6 emplacements suivants :

_ _ _ _ _ _

Pour placer les deux lettres « O », il y a $\dbinom{6}{2}$ possibilités :

_ **O** _ _ **O** _

Puis, lorsque ces « O » sont placés, il y a $4!$ manières de placer les 4 lettres restantes (qui sont distinctes) :

M O **T** **U** O **N**

Ainsi, les choix étant successifs, il y a en tout $\dbinom{6}{2}\times4!$ anagrammes du mot « MOUTON ».

On retrouve le résultat précédent : $\dbinom{6}{2}\times4!=\dfrac{6!}{2!\,4!}\times4!=\dfrac{6!}{2!}=360$.

> On considère le mot « MOOOOM ».
> **Combien d'anagrammes comporte ce mot ?**

On raisonne comme dans la dernière remarque.

Il y a $\dbinom{6}{2}$ possibilités pour placer les deux lettres « M ».

Les « emplacements » restant étant nécessairement des « O », il n'y a qu'une seule façon de les placer.
Ainsi, il y a en tout 15 anagrammes du mot « MOOOOM ».

On a : $\dbinom{6}{2}=3\times5=15$.

Le cours du chapitre 3

C Mains dans les jeux de cartes

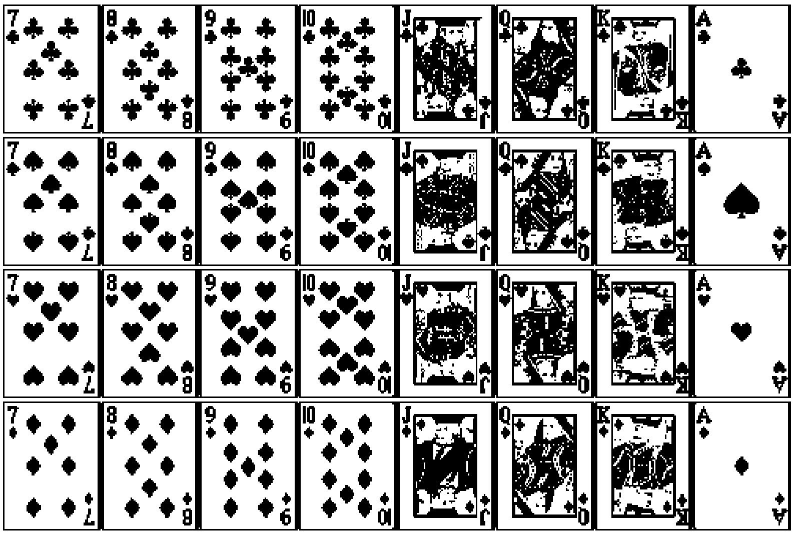
Considérons un jeu de 32 cartes classique.

Ici, le mot couleur n'a rien à voir avec son sens usuel.

Il existe quatre **couleurs** (ou **enseignes**) :

$\clubsuit$: trèfle ; $\spadesuit$: pique ; $\heartsuit$: cœur ; $\diamondsuit$: carreau.

Contrairement à un jeu de 52 cartes, les cartes numérotées de 2 à 6 sont retirées et il reste donc :



Dans ce qui suit, on distribue une main de 5 cartes.

Abusivement, on dit « trois cœur » au lieu de « trois cartes de cœurs ».

Combien de mains comporte exactement trois cœurs ? ♥♥♥□□

Si vous répondez $\binom{32}{3}$, c'est que vous manquez cruellement de réalisme !

On rappelle qu'il est vivement conseillé de commencer par la ou les contraintes les plus fortes.

Il faut d'abord s'occuper du nombre de triplet de cœurs (l'ordre n'a aucune importance) : $\binom{8}{3}$.

Ensuite, il faut choisir les deux cartes restantes parmi les 24 restantes : $\binom{24}{2}$.

Les choix étant successifs, le nombre de mains comportant exactement trois cœurs est : $\binom{8}{3}\binom{24}{2}$.

Combien de mains comporte exactement deux piques et deux trèfles ? ♠♠♣♣□

La situation est du même type que précédemment.

Plus synthétiquement : $\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{16}{1}$.

On trouve facilement : $16\binom{8}{2}^2$.

Combien de mains comporte exactement deux piques ou deux trèfles ? ♠♠□□□ ; ♣♣□□□

Attention ! La question posée est exactement la même que la précédente mais avec un mot de différence : *ou*.
Cela change radicalement la réponse. Intuitivement, il y a plus de mains qui comporte exactement deux piques <u>ou</u> deux trèfles que ceux qui comporte exactement deux piques <u>et</u> deux trèfles.

Il serait absurde de répondre $\binom{8}{2}+\binom{8}{2}$ par exemple.

Deux possibilités s'offrent à nous :

- la main contient exactement deux piques : $\binom{8}{2}\binom{24}{3}$ possibilités ;

- la main contient exactement deux trèfles : $\binom{8}{2}\binom{24}{3}$ possibilités.

Ce genre d'oubli est fréquent. Soyez particulièrement vigilent lors de vos comptages.

Mais il faut supprimer les cas doubles. On utilise par conséquent la **formule du crible**.

On trouve ainsi $2\binom{8}{2}\binom{24}{3}-16\binom{8}{2}^2$ mains possibles.

Combien de mains comporte exactement deux piques et deux rois ? ♠♠RR□ ; ♠♠R□□

La question est plus coriace car il y a le roi de pique qui existe.
Il y a donc deux possibilités :

En réalité : $\binom{1}{0}\binom{7}{2}\binom{3}{2}\binom{21}{1}$.

- le roi de pique n'est pas dans la main : $\binom{7}{2}\binom{3}{2}\binom{21}{1}$ possibilités ;

En réalité : $\binom{1}{1}\binom{7}{1}\binom{3}{1}\binom{21}{2}$.

- le roi de pique est dans la main : $7\times 3\times\binom{21}{2}$ possibilités.

On trouve ainsi $\binom{7}{2}\binom{3}{2}\binom{21}{1}+7\times 3\times\binom{21}{2}$ mains possibles.

Combien de mains comporte au moins un roi ? R□□□□

Il y a deux manières de s'y prendre. On peut dénombrer les mains comportant exactement un roi, puis deux etc. Mais on peut aussi faire l'inverse de ce qui est demandé. C'est-à-dire dénombrer les mains qui ne comporte aucun roi et ensuite retrancher au nombre total de mains ce qui a été trouvé.

Quand la situation est favorable, procéder ainsi est toujours conseillé.

Il y a $\binom{28}{5}$ mains de 5 cartes de sorte qu'aucune d'entres elles ne comporte un roi.

Ainsi, le nombre de mains qui comporte au moins un roi est égal à : $\binom{32}{5}-\binom{28}{5}$.

Remarque
En comptant les mains comportant exactement aucun roi, un roi, deux rois, ... cinq rois, on a l'égalité :

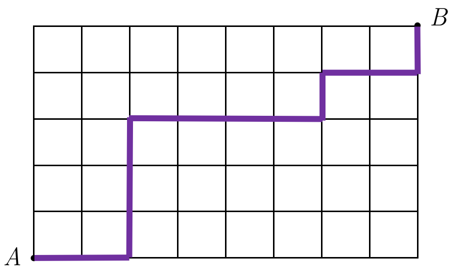
$$\binom{4}{0}\binom{28}{5}+\binom{4}{1}\binom{28}{4}+\binom{4}{2}\binom{28}{3}+\binom{4}{3}\binom{28}{2}+\binom{4}{4}\binom{28}{1}+\binom{4}{5}\binom{28}{0}=\binom{32}{5}.$$

Cette égalité illustre la **formule de Vandermonde** :

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{4}{k}\binom{28}{5-k}=\binom{32}{5}.$$

D Chemins sur une grille

C'est un problème très classique dont la résolution est très astucieuse.
On considère la grille suivante :



La règle est simple. En partant du point A, on veut rejoindre le point B. Les deux seuls déplacements autorisés sont « vers la droite » et « vers le haut ». Assimilé à un repère du plan, on peut se déplacer seulement sur des points de coordonnées entières.
Ci-dessus est tracé en violet un chemin possible.

Quel est le nombre de chemins possibles ?

Notons « D » lorsqu'on se déplace d'un carreau vers la droite et « H » lorsqu'on se déplace d'un carreau vers le haut.
Le chemin vu plus haut peut être assimilé au mot « DDHHHDDDDHDDH ».
En réalité, peu importe le chemin choisi, le nombre de pas vers la droite et vers le haut reste le même. Autrement dit, on obtiendrait une anagramme du mot « DDHHHDDDDHDDH ».
Il suffit alors de se rappeler de l'exemple dénombrant les anagrammes dans ce cas précis.

Le cours du chapitre 3

3 Situations abstraites en dénombrement

Nous revenons sur ce paragraphe sur les quatre premiers chapitres d'algèbre.

A Théorie des ensembles

L'exercice suivant est un grand classique :

> Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
> **Déterminer le nombre de couples** (A, B) **de** $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ **tels que** $A \subset B$.

Prenons des cas particuliers.
Si E est vide, alors il existe un seul couple possible remplissant la condition demandée.
Si E est un singleton, par exemple si $E = \{1\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, E\}$.
Les trois couples vérifiant la condition sont donc : $(\varnothing, \varnothing)$, $(\varnothing, E)$ et (E, E).
Si E est un singleton, par exemple si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, E\}$.
Les neuf couples vérifiant la condition sont donc :

$$(\varnothing, \varnothing),\ (\varnothing, \{1\}),\ (\varnothing, \{2\}),\ (\varnothing, E),\ (\{1\}, \{1\}),\ (\{1\}, E),\ (\{2\}, \{2\}),\ (\{2\}, E) \text{ et } (E, E).$$

On peut conjecturer que le nombre de couples vérifiant la condition demandée est 3^n.
Traitons le cas général. La donnée d'un couple (A, B) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$ est caractérisée par :

- le choix d'un sous-ensemble B de E de cardinal k ($0 \leqslant k \leqslant n$) : $\binom{n}{k}$ possibilités ;

- le choix d'un sous-ensemble A de B tel que $A \subset B$: 2^k possibilités.

Les choix étant successifs, pour un entier k fixé dans $[\![0, n]\!]$, il y a en tout $\binom{n}{k} 2^k$ possibilités pour la donnée d'un couple (A, B) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$.

En en déduit que le nombre de couple (A, B) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

Or, par le **binôme de Newton**, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$.

> Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
> **Calculer en fonction de n la somme** $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X)$ **.**

Cette question est tirée d'un oral de **Central MP 2006**. Mais ne vous inquiétez pas ! Cette question est largement faisable à notre niveau...

Beaucoup de sujets d'oraux de niveau MP sont faisables en licence 1.

On va vous montrer deux manières de répondre à cette question.

<u>1ère méthode</u>

L'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \overline{X} \end{array}$ est bijective puisque c'est une involution.

On a $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

On a clairement de ce qui précède : $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(\overline{X})$.

Les parties X et $\overline{X}$ sont disjointes.

Donc :
$$\begin{aligned}
\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) + \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(\overline{X})\right) = \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} (\mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(\overline{X})) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X \cup \overline{X}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(E) \\
&= \frac{1}{2} n \,\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) \\
&= \frac{1}{2} n 2^n \\
&= n 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir un sous-ensemble à k éléments. Puis la somme de ces sous-ensembles vaut $k\binom{n}{k}$.

2ème méthode

Cette méthode est plus simple et plus rapide que la précédente pour peu qu'on connaisse une somme classique.

On a : $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in \mathcal{P}_k(E)} \operatorname{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

B Relations

Les relations ont été étudiées dans le **chapitre 2** du livre Algèbre Licence 1.

> Soient n et p deux entiers naturels, E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p.
> **Combien y a-t-il de relations de E vers F ?**

La donnée d'une relation de E vers F revient par définition à la donnée d'un élément de $\mathcal{P}(E \times F)$.

Il y a ainsi autant de relation de E vers F que d'éléments dans $\mathcal{P}(E \times F)$.

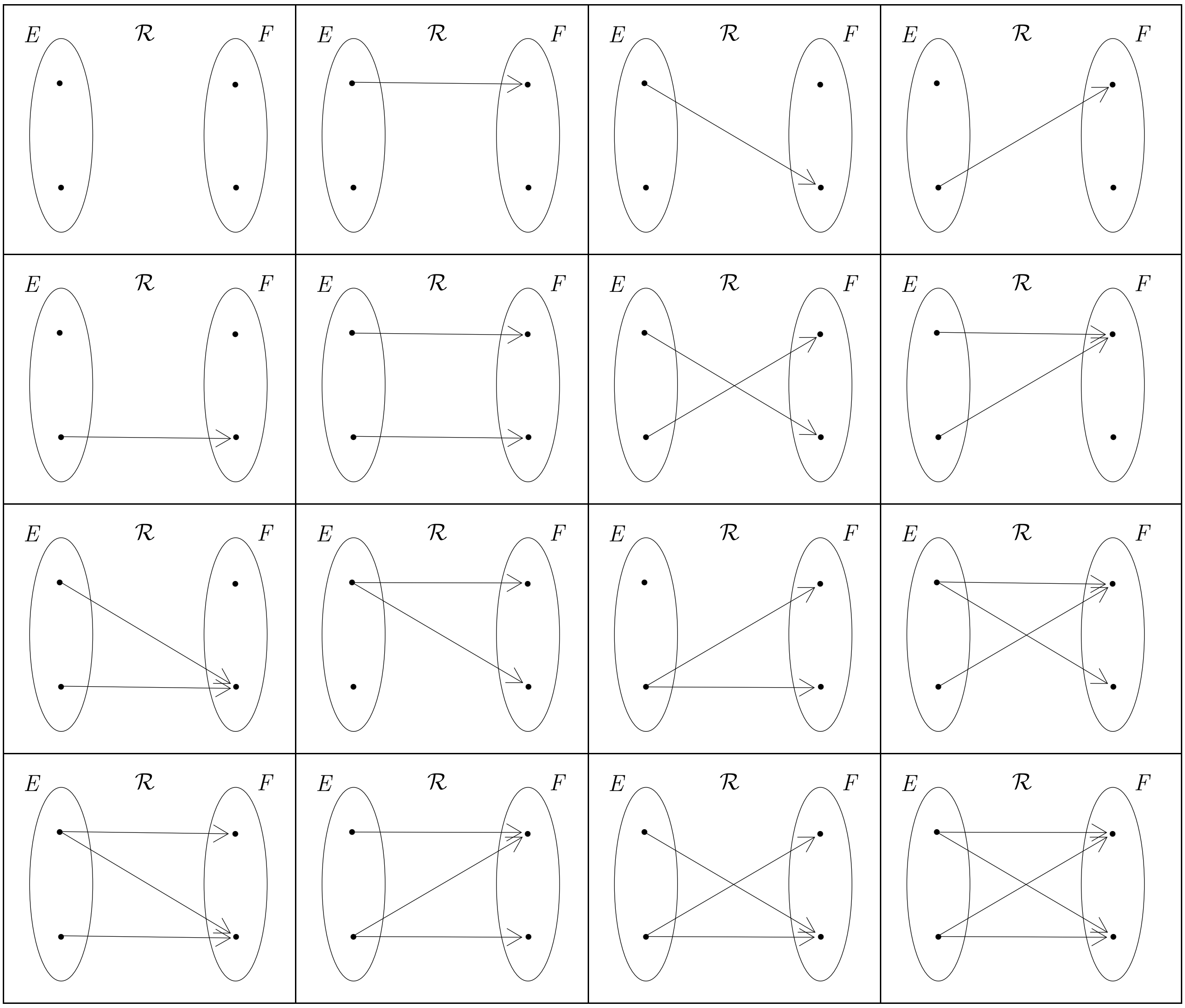
On a : $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E \times F)) = 2^{\operatorname{Card}(E \times F)} = 2^{\operatorname{Card}(E) \times \operatorname{Card}(F)} = 2^{np}$.

Il y a ainsi 2^{np} relations de E vers F.

Remarques

1. De ce qui précède, le nombre de relation binaire dans E est égal à 2^{n^2}.
2. Pour un ensemble fini à 2 éléments, il y a de ce qui précède 16 relations binaires possibles !

Voici ces 16 relations représentées par des diagrammes de Venn :



Parmi ces 16 relations, 7 sont des relations qui ne sont pas des fonctions (les 7 dernières), 5 sont des fonctions qui ne sont pas des applications (les 5 premières) et 4 sont des applications (le reste).

C Fonctions et applications

Les fonctions et les applications ont été étudiées dans le **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

> Soient n et p deux entiers naturels, E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p.
> **Combien y a-t-il de fonctions de E vers F ?**

1ère méthode

Elle est extrêmement simple et rapide.

Dans ce cas, il n'existe qu'une relation de E vers F : la relation vide.

Le cas où l'ensemble E est vide est immédiat. On considère à présent que E n'est pas vide.
Pour la donnée d'un élément de E, il y a :
- l'attribution d'une image (unique) : p possibilités ;
- ou l'attribution d'aucune image : 1 possibilité.

Les choix étant alternatives, il y a en tout $p+1$ possibilités pour l'action d'un élément de E.

Puisque le cardinal de E est égal à n, il vient que le nombre de fonctions de E vers F est $(p+1)^n$.

2ème méthode

Cette méthode utilise le **binôme de Newton**.
Pour k fixé dans $[\![0, n]\!]$, on dénombre le nombre de fonctions de E vers F tels que k éléments seulement ont une image.

Pour cela, on choisit un sous-ensemble de E à k éléments : $\binom{n}{k}$ possibilités.

Puis pour chaque élément du sous-ensemble choisit, il y a p possibilités pour l'attribution d'une image (unique). Il y a ainsi p^k possibilités pour le choix des images de tous les éléments du sous-ensemble considéré.

Le choix étant successifs, il y a pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} p^k$ fonctions de E vers F tels que k éléments exactement ont une image.

On peut aussi trouver cette réponse grâce à une bijection. Mais nous évitons l'utilisation systématique des bijections pour résoudre des problèmes de dénombrement. La technique ci-contre sera donc à privilégier.

Ainsi, le nombre de fonctions de E vers F est égal à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k$, c'est-à-dire $(p+1)^n$.

Remarque

En connaissant le nombre d'applications de E dans F (p^n), on obtient facilement les inégalités suivantes :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p^n \leqslant (p+1)^n \leqslant 2^{np}.$$

En particulier :
$\forall n \in \mathbb{N},\ n^n \leqslant (n+1)^n \leqslant 2^{n^2}$.

> Soient n et p deux entiers naturels, E et F deux ensembles de cardinaux respectifs p et n.
> **Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?**

Dénombrer le nombre d'applications croissantes est plus difficile et fait l'objet de l'**exercice 5.**

Commençons par remarquer que toute application strictement croissante de E vers F n'est pas nécessairement injective (sauf si la relation d'ordre associée est totale).

C'est le **théorème 28** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1.

Supposons alors que la relation d'ordre associée est l'ordre usuel $\leqslant$. Une telle application est alors injective et donc $p \leqslant n$. Donc, si $p > n$, il n'existe pas d'injection de E vers F et donc aucune application strictement croissante de E vers F.
Si E est vide, alors toute application de E vers F est croissante (il y en a qu'une seule).
Sinon (donc $p \geqslant 1$), notons $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$ où les éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont deux à deux distincts.
Pour la donnée d'une application strictement croissante de E vers F, on a besoin d'un sous-ensemble $\{f(x_1), \ldots, f(x_p)\}$ d'éléments de F avec un seul rangement possible des éléments (par exemple $f(x_1) < \ldots < f(x_p)$).

Puisque la relation d'ordre est totale, un seul rangement des images est possible.

Pour sélectionner cet ensemble d'images, on dispose de $\binom{n}{p}$ possibilités puis d'une seule possibilité pour les ranger.

Les choix étant successifs, il y a en tout $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de E vers F.

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Dénombrer le nombre d'applications injectives de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ est connu : $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

On rappelle que cela correspond aussi au nombre d'arrangements de p éléments de $[\![1, n]\!]$.

En revanche dénombrer le nombre d'applications surjectives (quand $n \leqslant p$) de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ est plus difficile.

Le cours du chapitre 3

Le théorème suivant donne explicitement le nombre d'applications surjectives de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ (quand $n \leqslant p$).

On note S_n^p le nombre de surjection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.

La formule demande un effort de mémorisation.

Théorème 1 **Nombre de surjections**

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant p$.

Le nombre d'applications surjectives de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$.

La preuve donnée ci-contre est la plus élémentaire (sans outil supplémentaire). D'autres preuves existent mais nécessite de développer de nouvelles notions (nombres de Stirling, formule d'inversion de Pascal...).
Le lecteur intéressé par ces autres preuves pourra consulter le **chapitre 1** du livre Probabilités Licence 2.

Preuve

Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$.

Considérons l'ensemble $\{f \in [\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}, \forall x \in [\![1,p]\!], f(x) \neq k\}$ noté A_k , des applications f de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ tel que k n'admet pas d'antécédent par f.

Il est alors clair que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est l'ensemble des applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ qui ne sont pas surjectives.

L'ensemble des applications de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ comprend les applications surjectives et ceux qui ne le sont pas.

Il vient donc que $[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} = S_n^p \cup \left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$. Une application ne pouvant pas être à la fois surjective et non surjective, la réunion précédente est disjointe.

Ainsi, $\mathrm{Card}([\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}) = \mathrm{Card}(S_n^p) + \mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$, soit $\mathrm{Card}(S_n^p) = n^p - \mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$.

Par la **formule de Poincaré** on a :

Les étapes ne sont pas évidentes (voir la vidéo). Mais on va vous expliquer en bref. L'intersection $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble des applications de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ telles que les k éléments :
$$i_1, \ldots, i_k ,$$
n'ont pas d'antécédent par f.
Cela correspond alors au nombre d'applications de l'ensemble $[\![1,p]\!]$ dans l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$.
Enfin, comme ce nombre d'applications est constant (pour k fixé), il suffit de connaître le nombre de possibilités de les sélectionner : $\binom{n}{k}$ (puis, il y a qu'une seule façon de les ranger dans l'ordre strictement croissant).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(S_n^p) = n^p - \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= n^p - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}\mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\\
&= n^p - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}(n-k)^p\\
&= n^p - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^p\\
&= n^p + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^p\\
&\underset{j=n-k}{=} n^p + \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\binom{n}{n-j}j^p\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p .
\end{aligned}$$

L'entier n^p est le terme d'indice n.

□

Remarques

1. Si $p = n$, toute application de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est une bijection (**théorème 20** du **chapitre 1**).

On devrait donc trouver $S_n^n = n!$.

2. En posant $[\![1,0]\!] = \varnothing$, si n est nul, alors p l'est aussi et donc $S_0^0 = 1$.

En acceptant dans ce cas que $0^0 = 1$.

D Structures algébriques

Les structures algébriques ont été étudiées dans le **chapitre 4** du livre Algèbre Licence 1.

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de lois de composition internes dans E est égal à n^{n^2} .

La donnée d'une loi d'une composition interne dans E est par définition la donnée d'une application de E^2 dans E.

Il y a donc autant de lois de composition internes dans E que d'applications de E^2 dans E.

Dans la théorie des cardinaux, on convient que $0^0 = 1$.

On a : $\mathrm{Card}(E^{E^2}) = (\mathrm{Card}(E))^{\mathrm{Card}(E^2)} = n^{n^2}$.

Il y a ainsi n^{n^2} lois de composition internes dans E.

Remarque
On convient qu'il existe qu'une seule loi de composition interne dans l'ensemble vide. La formule reste ainsi cohérente dans ce cas particulier.

E Equations et inéquations

Nous terminons ce petit paragraphe par le dénombrement de solutions d'équations et d'inéquations.

> Soit n un entier naturel.
> **Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (x, y) tel que $x + y = n$.**

L'ensemble des solutions de cette équation est $\{(x, n - x), x \in [\![0, n]\!]\}$.
Ainsi, le nombre de couple d'entiers naturels (x, y) tel que $x + y = n$ est égal à $n + 1$.

Il y a autant de solution de cette équation que d'entiers dans $[\![0, n]\!]$.

> Soit n un entier naturel.
> **Déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (x, y) tel que $x + y \leqslant n$.**

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, un couple d'entiers naturels (x, y) vérifiant $x + y = k$ vérifie également $x + y \leqslant n$.
En utilisant alors le résultat de la question précédente, il vient que le nombre de couple d'entiers naturels vérifiant l'inéquation $x + y \leqslant n$ est égal à $\sum_{k=0}^{n} (k + 1)$, soit $\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$, ou encore $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Si vous voulez une rédaction impeccable (celle-ci-contre est largement suffisante !) voici comment on peut procéder. On note pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x + y = k\}$.

Puis, par unicité du cardinal, la réunion $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ est disjointe et alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k + 1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} . \end{aligned}$$

4 Combinaisons avec répétition

A Définition

La notion de **combinaison avec répétition** est une nouveauté par rapport au lycée où seules les combinaisons sans répétition ont été traitées.
Lorsqu'on lance simultanément deux dés ordinaires indistinguables, on obtient deux entiers compris entre 1 et 6.
Si on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus, l'ordre des dés tirés n'a aucune importance et il est possible que les deux chiffres soient égaux. C'est dans cette situation que la notion de combinaison avec répétition apparaît.

La **définition 1** est très abstraite.
On rappelle qu'une combinaison (classique) est un sous-ensemble, un arrangement un uplet mais qu'une combinaison avec répétition est une application.

> **Définition**
> Soient n un entier naturel non nul et p un entier naturel.
> On appelle ***p*-combinaison avec répétition** de $\mathbb{N}_n$ toute application $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow [\![0, p]\!]$ telle que :
> $$\sum_{k=1}^{n} f(k) = p .$$

Exemple
On veut considérer 7 éléments (répétition possible) de l'ensemble $\{1, ..., 5\}$.
Chacun des éléments $1, ..., 5$ peut être choisi jusqu'à 7 fois, mais la somme des éléments pris doit valoir 7. Par exemple, on a les listes suivantes possibles :

1-1-1-2-3-3-5 ; 1-2-2-2-2-4-4 ; 4-4-5-5-5-5-5 ; 1-2-3-4-4-5-5 ; 5-5-5-5-5-5-5.

La première liste est représentée par l'application $f : \{1, ..., 5\} \longrightarrow \{0, ..., 7\}$ telle que $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 0$, $f(5) = 1$. De plus, on a bien $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 7$.
A vous de déterminer les autres applications des listes restantes.

L'image d'un entier par l'application f donne le nombre de fois où il apparaît. Par exemple dans la première liste, le chiffre 3 apparaît 3 fois et le chiffre 4 zéro fois.

Remarques
1. Si p est nul, alors l'ensemble d'arrivée est réduit au singleton $\{0\}$ et toutes les images de la seule application de $\mathbb{N}_n$ dans $\{0\}$ sont nulles.
2. On retrouve naturellement la notion de combinaison avec répétition quand on souhaite répartir (pas nécessairement de manière équitable) un certain nombre d'objets (identiques) entre plusieurs personnes.

Cette application est même constante.

S'il y a plus de personnes que d'objets, alors nécessairement au moins une personne n'a pas d'objet lors d'une répartition.

B Nombre de combinaisons avec répétition

Le théorème suivant donne explicitement le nombre de combinaisons avec répétition.

Le **théorème 2** est admis. Il est particulièrement complexe à démontrer rigoureusement mais une explication simple et imagée est donnée ci-après. Le lecteur pourra aussi voir l'**exercice 15** qui traite du nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ (quand $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$) et l'**exercice 38** qui traite du nombre de solution de l'équation d'inconnue $(x_1,\dots,x_n)$:

$$x_1+\dots+x_n=p\ ,$$

dans $\mathbb{N}^n$ quand $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$. Ces deux exercices sont liés au théorème ci-contre.

Théorème 2 — Nombre de combinaisons avec répétition

Soient n un entier naturel non nul et p un entier naturel.

Le nombre de p-combinaison avec répétition de $\mathbb{N}_n$ est égal à $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$.

Remarque

On note Γ_n^p le nombre de p-combinaison avec répétition de $\mathbb{N}_n$.

Donnons une explication de la formule.
Donnons une p-combinaison avec répétition de $\mathbb{N}_n$.

On peut représenter cette situation avec les deux symboles « $*$ » et « $|$ » :

$$\underbrace{*\dots*}_{1}\,|\,\underbrace{*\dots*}_{2}\,|\,\underbrace{*\dots*}_{\dots}\,|\,\underbrace{*\dots*}_{n}\ .$$

Pour cela, on a besoin de « p étoiles » identiques, et de $n-1$ « barres ». En tout, il y a donc $n+p-1$ « barres » et « étoiles » qui seront désormais appelé « emplacements ».

Chaque p-combinaison avec répétition de $\mathbb{N}_n$ revient à choisir p emplacements parmi les $n+p-1$ emplacements.

Il y a ainsi en tout $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$ p-combinaison avec répétition de $\mathbb{N}_n$.

Par exemple, la liste 1-1-1-2-3-3-5 (c'est une 7-combinaisons avec répétition de $[\![1,5]\!]$) est représenté par :

$$***|*|**||*\ ,$$

qui nécessite 4 « barres » et 7 « étoiles » identiques.
Si l'on faisait comme si ces 11 « barres » et 7 « étoiles » correspondent à des « emplacements » :

$$-----------\ ,$$

alors une 7-combinaisons avec répétition de $[\![1,5]\!]$ revient à « réserver » 7 emplacements. Par exemple :

$$\times--\times\times\times--\times\times\times\ ,$$

devient avec les « barres » et les « étoiles » :

$$*||***||***\ .$$

Les exercices du chapitre 3

1 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n-1]\!], \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

3 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

4 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

5 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

6 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

7 Démonstrations supplémentaires de cours

Par des arguments combinatoires seulement, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n\,! \leqslant n^n.$$

8 Mains dans un jeu de cartes

De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu classique de 52 cartes, une main de 5 cartes qui comporte exactement 2 dames et 2 cœurs ?

9 Mains dans un jeu de cartes

On pose l'une à côté de l'autre, dans l'ordre de leur sortie, 5 cartes tirées l'une après l'autre et <u>sans</u> remise, dans un jeu de 32 cartes.
Combien de dispositions différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles ?

10 Dénombrements classiques

Combien y a-t-il de façons de répartir 4 bonbons identiques entre 3 enfants ?

11 Mains dans un jeu de cartes

On tire 5 cartes tirées l'une après l'autre et <u>avec</u> remise, dans un jeu de 32 cartes.
Combien de dispositions différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles ?

12 Dénombrements classiques

Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Dénombrer le nombre d'applications non surjectives de E dans E.

13 Dénombrements classiques

Soient n et p deux entiers naturels, A et B deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p et tels que $A \subset B$.
Dénombrer le nombre de sous-ensembles X de B tel que :

$$A \subset X \subset B.$$

14 Dénombrements classiques

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer le nombre de triplet (x,y,z) de $\mathbb{N}^3$ tel que :

$$x+y+z = n.$$

2) Déterminer le nombre de triplet (x,y,z) de $\mathbb{N}^3$ tel que :

$$x+y+z \leqslant n.$$

15 Applications croissantes

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et f une application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

1) Montrer que l'application $g : [\![1, p]\!] \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], g(k) = f(k) + k - 1,$$

est une application strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n+p-1]\!]$.

2) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n+p-1]\!]$.

3) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

16 Dénombrements classiques

Un joaillier dispose de 7 pierres semi-précieuses distinctes.
1) De combien de façons peut-il les disposer pour constituer un collier à fermoir.
2) De combien de façons peut-il les disposer pour constituer un collier sans fermoir.

17 ★ Dénombrements classiques

1) De combien de façons peut-on répartir 6 élèves d'une classe de 6 élèves en groupes de 3 élèves ?
2) De combien de façons peut-on répartir 9 élèves d'une classe de 36 élèves en groupes de 3 élèves ?
Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
3) Déterminer le nombre de groupement de p éléments dans un ensemble à np éléments.

18 Nombre de surjections

Soit n un entier naturel.
Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

19 ★ Nombre de surjections

Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Calculer en fonction de n :

$$1) \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cap Y) \qquad 2) \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cup Y).$$

20 Dénombrements classiques

Combien y a-t-il de nombres entiers dont l'écriture décimale est composée de 5 chiffres où le chiffre « 0 » figure une fois et une seule ?

21 Dénombrements classiques

Combien y a-t-il de nombres entiers dont l'écriture décimale est composée de 5 chiffres et comportant un chiffre répété et un seul.

Les exercices du chapitre 3

22 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de relations réflexives dans E ?

23 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de relations symétriques dans E ?

24 ★ Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de relations antisymétriques dans E ?

25 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de relations réflexives et symétriques dans E ?

26 ★ Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de relations réflexives et antisymétriques dans E ?

27 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de lois internes et commutatives dans E ?

28 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de lois internes admettant un neutre dans E ?

29 ★ Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de lois internes pour lesquelles tout élément est régulier à gauche ?

30 ★★★ Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de lois internes et associatives dans E ?

31 ★★★ Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de relations transitives dans E ?

32 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de lois internes pour lesquelles tout élément est idempotent ?

33 Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Quel est le nombre de lois internes pour lesquelles tout élément est absorbant ?

34 ★ Dénombrements classiques 🖫
Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.
Déterminer le nombre de couples $(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2$ tels que $X\cap Y$ soit un singleton.

35 ★ Dénombrements classiques 🖫
Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer le nombre d'applications $f:[\![1,n]\!]\longrightarrow[\![1,n]\!]$ telle que :
$$f\circ f=f\ ?$$

36 Dénombrements classiques
Un vieil agriculteur possède 5 champs distincts.
Il désire les léguer à ses trois enfants en respectant la règle suivante : chaque enfant doit recevoir au moins un champ.
Combien de possibilités a-t-il pour rédiger son testament ?

37 Dénombrements classiques
La fabrication d'une pièce mécanique nécessite de faire passer cette dernière successivement sur 5 machines : A, B, C, D et E.
Déterminer les ordres de passages possibles dans les cas suivants :
1) l'ordre de passage est différent ;
2) la pièce doit d'abord passer par A ;
3) la pièce doit passer par A avant B et C ;
4) la pièce doit passer directement de la machine A à la machine B dans cet ordre.

38 ★ Equation et dénombrement 🖫
Soient n et p deux entiers naturels tels que $n\neq 0$.
Le but de cet exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $(x_1,\dots,x_n)$ dans $\mathbb{N}^n$:
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=p\,.$$
On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{N}^n$ tels que l'égalité précédente soit vraie.
1) Déterminer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, Γ_n^0 et Γ_n^1.
2) Déterminer pour tout $p\in\mathbb{N}$, Γ_1^p et Γ_2^p.
3) Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\forall p\in\mathbb{N}^*,\Gamma_n^p=\Gamma_{n-1}^p+\Gamma_n^{p-1}.$$
4) En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\forall p\in\mathbb{N},\Gamma_n^p=\sum_{k=0}^{p}\Gamma_{n-1}^k\,.$$
5) Montrer alors que :
$$\Gamma_n^p=\binom{n+p-1}{p}.$$

39 Dénombrements classiques
Pour sortir, Luc choisit une paire de chaussures (noires ou marrons), un pantalon (bleu, beige ou rouge), une veste (velours ou toile) et un chapeau (feutre ou cuire).
1) Quelle est le nombre de tenues différentes que Luc peut porter ?
Léa accompagne Luc.
Il est alors exclu que Luc porte les chaussures marrons avec le pantalon rouge.
2) Quelle est dans ce cas le nombre de tenues différentes que Luc peut porter ?

40 Main dans un jeu de cartes
On considère une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
1) Combien de ces mains contiendront exactement un roi ?
2) Combien de ces mains contiendront au moins un roi ?
3) Combien de ces mains contiendront exactement un roi et deux dames ?
4) Combien de ces mains contiendront exactement un roi et deux cœurs ?
5) Combien de ces mains contiendront au plus trois cœurs ?

Les exercices du chapitre 3

41 **Dénombrements classiques**

Un groupe de 7 amis se retrouvent pour sortir ensemble.

1) De combien de façons peuvent-ils s'assoir sur les 7 fauteuils d'un rang d'une salle de cinémas ?

2) De combien de façons peuvent-ils s'assoir autour d'une table de conférence où se trouve un fauteuil de président et 6 chaises ?

3) De combien de façons peuvent-ils s'assoir autour d'une table ronde où se trouve 7 chaises ?

42 **Mots et dénombrement**

L'alphabet est composé de 26 lettres, dont 6 voyelles.

On appelle **mot** toute suite de lettres ayant un sens ou non.

1) Combien existe-t-il de mots de 4 lettres ?

2) Combien existe-t-il de mots de 4 lettres, constitués de 4 lettres différentes ?

3) Combien existe-t-il de mots de 4 lettres commençant et se terminant par une voyelle ?

4) Combien existe-t-il de mots de 4 lettres contenant au moins une voyelle ?

5) Combien existe-t-il de mots de 4 lettres écrits uniquement avec les lettres A et B, chaque lettre apparaissant au moins une fois ?

6) Combien existe-t-il de mots de 4 lettres constitués d'exactement 2 lettres différentes ?

43 **Anagrammes**

1) Combien existe-t-il d'anagrammes du mot « MATHS » ?

2) Combien existe-t-il d'anagrammes du mot « DIVISIBILITE » ?

44 **Dénombrements classiques**

Une urne contient douze boules : quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, six boules rouges numérotées de 5 à 10 et deux boules noires numérotées 11 et 12.

On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne et on note, à chaque tirage, le numéro obtenu.

1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2) Combien y a-t-il de résultats pour lesquels les boules sont regroupées par couleur ?

3) Combien y a-t-il de résultats pour lesquels les boules rouges sont regroupées ?

45 ★ **Jeu du poker**

Cet exercice demande des connaissances concernant le jeu du poker.

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes, et l'on distribue à chaque joueur une main de 5 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains différentes ?

2) Combien y a-t-il de mains contenant le carré d'as ?

3) Combien y a-t-il de mains contenant un carré ?

4) Combien y a-t-il de mains contenant un full ?

5) Combien y a-t-il de mains contenant un brelan ?

6) Combien y a-t-il de mains contenant une double ?

7) Combien y a-t-il de mains contenant une paire ?

8) Combien y a-t-il de mains contenant une quinte flush ?

46 **Dénombrements classiques**

On répartit au hasard cinq billes numérotés de 1 à 5 dans quatre sacs numérotés de 1 à 4.

On suppose que chaque sac peut contenir toutes les billes.

1) Quel est le nombre de répartitions possibles ?

2) Quel est le nombre de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

47 **Dénombrements classiques**

Soit n un entier naturel non nul.

Un groupe de n personnes est invité à un repas. On dispose d'une rangée de n chaises destinées aux n invités.

1) Combien existe-t-il de dispositions différentes ?

On dispose maintenant d'une table ronde avec n chaises.

2) Combien existe-t-il de dispositions différentes, sachant que deux dispositions sont identiques si chaque invité a les mêmes voisins ?

48 ★ **Dénombrements classiques**

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne et on note, à chaque tirage, le numéro obtenu.

1) Quel est le nombre de résultats possibles ?

2) Quel est le nombre de résultats pour lesquels les numéros obtenus sont dans l'ordre croissant ?

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

3) Quel est le nombre de résultats pour lesquels les k premiers numéros obtenus sont dans l'ordre croissant ?

49 ★ **Dénombrements classiques** 🖫

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

On note E l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que :

$$1 \leqslant x_1 < \ldots < x_p \leqslant n.$$

1) Calculer le cardinal de E.

Soient $(i, k) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$.

2) Déterminer le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in E$ tels que $x_i = k$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

3) Montrer que :

$$\sum_{k=i}^{n-p+i} \binom{k-1}{i-1}\binom{n-k}{p-i} = \binom{n}{p}.$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

4) a) Que représente la somme $\displaystyle\sum_{i=k-n+p}^{k} \binom{k-1}{i-1}\binom{n-k}{p-i}$?

b) En déduire une expression de cette somme en fonction de n et p.

50 ★ **Nombre de surjections** 🖫

Soit n un entier naturel.

Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

51 **Nombre de sous-ensembles** 🖫

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Quel est le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$?

52 **Nombre de sous-ensembles** 🖫

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Quel est le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cup B = E$?

53 **Mots et dénombrement**

1) Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ?

2) Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres distinctes ?

3) Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ?

4) Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres de sorte qu'ils soient des *palindromes* ?

Les exercices du chapitre 3

54 ★ **Nombre de sous-ensembles** 🖫

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Quel est le nombre de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que :

$$A \cup B \cup C = E \ ?$$

55 **Nombre de sous-ensembles** 🖫

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Soient p un entier naturel et A une partie de E de cardinal p.

Quel est le nombre de parties B de E telles que $A \cap B = \varnothing$?

56 **Nombre de sous-ensembles** 🖫

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Soient p un entier naturel et A une partie de E de cardinal p.

Quel est le nombre de parties B de E telles que $A \subset B$?

57 **Nombre de sous-ensembles** 🖫

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Soient p un entier naturel et A une partie de E de cardinal p.

Quel est le nombre de parties B de E telles que $A \cup B = E$?

58 ★ **Nombre de partitions par paires** 🖫

Soit n un entier naturel non nul.

On considère un ensemble E_{2n} constitué de $2n$ éléments.

On appelle partition par paires de E_{2n} tout ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ constitué de parties de E_{2n}, toutes de cardinal 2 deux à deux disjointes et telles que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

On note c_n le nombre de partitions par paires de E_{2n} possibles.

1) Déterminer c_1 et c_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre c_{n+1} et c_n.

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$$

59 **Dénombrements classiques**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Combien y a-t-il de nombres entiers dont l'écriture décimale comporte exactement n chiffres dont deux chiffres « 7 » exactement ?

60 ★ **Dénombrements classiques**

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

Soient p un entier naturel et A une partie de E de cardinal p.

Quel est le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que :

$$X \cup Y = E \text{ et } A \subset X \cup Y \ ?$$

61 **Dénombrements classiques**

Le code confidentiel d'une carte bancaire est un entier naturel dont l'écriture décimale est constituée de 4 chiffres tous non nuls.

1) Quel est le nombre de codes possibles ?

2) Combien existe-t-il de codes de quatre chiffres différents ?

3) Combien existe-t-il de codes comportant une seule fois le chiffre 1 ?

4) Combien existe-t-il de codes comportant deux fois le chiffre 1, les deux autres chiffres étant différents entre eux ?

5) Combien existe-t-il de codes comportant deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2 ?

6) Combien existe-t-il de codes comportant deux fois deux chiffres distincts ?

62 **Dénombrements**

Luc range ses dix livres de compte, numérotés de 1 à 10 sur une étagère. De combien de manières peut-il ranger ses livres de façon à ce que les livres 1, 2 et 3 soient côte à côte (pas nécessairement dans cet ordre).

63 ★★ **Dénombrements**

Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A_{n,k} = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{N}, \sum_{x \in E} f(x) \leqslant k \right\}, \quad a_{n,k} = \mathrm{Card}(A_{n,k}),$$

$$B_{n,k} = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{N}, \sum_{x \in E} f(x) = k \right\}, \quad b_{n,k} = \mathrm{Card}(B_{n,k}).$$

1) Montrer que :

$$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \begin{cases} b_{n,k} = a_{n-1,k} \\ a_{n,k} = b_{n,k} + a_{n,k-1} \end{cases}.$$

2) En déduire que :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} a_{n,k} = \dbinom{n+k}{k} \\ b_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k} \ (\text{si } n \geqslant 1) \end{cases}.$$

64 **Dénombrements classiques**

Un sac contient six boules blanches numérotées de 1 à 6, quatre boules rouges numérotées de 1 à 4, et deux boules vertes numérotées de 1 à 2. On tire quatre boules simultanément.

1) Quel est le nombre total de tirages possibles ?

2) Quel est le nombre de tirages :

a) ne comportant que des chiffres pairs ?

b) comportant exactement deux boules blanches et une boule rouge ?

c) comportant exactement une boule verte et une boule numérotée 1 ?

65 **Dénombrements classiques**

Le jeu de *triomino* est un jeu de domino avec des tuiles de forme triangulaire, chaque sommet du triangle étant numéroté de 0 à 5.

Combien y-a-t-il de tuiles non superposables dans un jeu de triomino ?

66 **Dénombrements classiques**

Une société de voyage propose à ses clients le tour de l'Europe en seulement 8 jours.

Il s'agit de visiter 4 capitales européennes en passant deux jours dans chaque ville. Les capitales sont à choisir parmi Rome, Paris, Londres, Amsterdam, Madrid, Prague et Budapest.

Combien y-a-t-il de circuits possibles ?

67 **Dénombrements classiques**

Soient n et r deux entiers naturels non nuls.

On place r boules dans n tiroirs numérotés.

Déterminer le nombre de répartitions dans chacun des cas suivants.

1) $r \leqslant n$ et chaque tiroir peut contenir au plus une boule ; les boules sont discernables.

2) $r \leqslant n$ et chaque tiroir peut contenir au plus une boule ; les boules sont indiscernables.

3) Chaque tiroir peut contenir la totalité des boules ; les boules sont discernables.

4) Chaque tiroir peut contenir la totalité des boules ; les boules sont indiscernables

Les exercices du chapitre 3

68 Dénombrements classiques

Dans tout l'exercice, les lettres N, n, m, k, r et s désignent des entiers naturels non nuls.

Dans une urne, il y a N boules numérotées de 1 à N.

On effectue n tirages avec remise d'une boule dans cette urne.

1) Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels une boule donnée B est prélevée exactement k fois ?

2) Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels une boule donnée B est prélevée exactement m fois au cours des r premiers tirages ?

3) Combien existe-t-il de résultats différents pour lesquels une boule donnée B est prélevée pour la s-ième fois au r-ième tirage ?

69 Mots et dénombrement

L'alphabet est composé de 26 lettres dont 6 des voyelles et 20 des consonnes.

On appelle **mot** toute suite de lettres ayant un sens ou non.

Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1) en tout ;
2) deux à deux distincts ;
3) ayant exactement deux lettres identiques ;
4) commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;
5) contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne ;
6) contenant deux consonnes identiques et une voyelle ;
7) contenant au moins une consonne ;
8) contenant au moins une consonne et une voyelle.

70 Dénombrements classiques

Soit n un entier naturel non nul.

Donner le nombre de couple $(x, y) \in \{1, \dots, n\}^2$ tels que :

$$1)\ x \leqslant y \qquad 2)\ x < y \qquad 3)\ x + y = n \qquad 4)\ x + y \leqslant n\,.$$

71 Dénombrements classiques

On dispose de trois urnes notées A, B, C et de six boules numérotées de 1 à 6.

On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois entiers indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B et C.

Déterminer le nombre de répartitions :

1) en tout ;
2) telles que l'urne A soit vide ;
3) telles que l'urne A soit vide et soit la seule urne vide ;
4) telle qu'une urne soit vide et une seulement ;
5) telles qu'aucune urne ne soit vide ;
6) telles qu'au moins une urne soit vide.

72 Nombres de sous-ensembles

Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.

Soient p un entier naturel et A une partie de E de cardinal p.

Quel est le nombre de parties B de E telle que $B \subset A$?

73 ★ Nombres d'involutions

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n.

On note u_n le nombre d'involutions de E.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Montrer que :

$$\forall n \in n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n\,.$$

74 ★ Nombres de sous-ensembles

Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.

Soient p et q deux entiers naturels, A et B deux parties de E de cardinaux respectifs p et q.

Quel est le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que :

$$X \subset A \cap B \ \text{ et } \ A \cup B \subset Y \ \ ?$$

75 ★ Nombres de sous-ensembles

Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.

Soient p et q deux entiers naturels, A et B deux parties de E de cardinaux respectifs p et q.

Quel est le nombre de couples $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que :

$$A \cap B \subset X \cap Y \ \text{ et } \ X \cup Y \subset A \cup B \ \ ?$$

76 ★★ Applications monotones

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Déterminer le nombre d'applications :

1) monotones de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$;

2) non monotones de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

77 ★ Nombres de sous-ensembles

Soient n un entier naturel et E un ensemble fini de cardinal n.

Soient p et q deux entiers naturels, A et B deux parties de E de cardinaux respectifs p et q.

Quel est le nombre de parties X de E telle que :

$$A \cap B \subset X \subset A \cup B \ \ ?$$

78 Dénombrements classiques

Dans une classe de 45 élèves, tout le monde se serre la main le matin en arrivant.

1) Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

2) Généraliser le résultat.