Racines n-ièmes

2

Introduction

Vous connaissez depuis longtemps les *racines carrées* et vous en avez même étudié la fonction associée. Lorsque a désigne un nombre réel positif, il est connu que ce que l'on appelle « racine carrée de a » est le nombre positif dont le carré vaut a et est notée $\sqrt{a}$.
Mais cette « définition » ne peut pas convenir dans le supérieur. Il y a un problème évident d'existence et d'unicité qu'il faut d'abord régler avant de définir la racine carrée. C'est ce que nous commencerons à faire.

C'est ce que l'on a fait avec la partie entière d'un nombre réel.

Nous généraliserons aussi avec les racines n-ièmes.

Prérequis

- Nombres réels (**chapitre 1**)
- Sommes et produits (**chapitre 6** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Introduire les racines carrées
- Etudier les propriétés des racines carrées
- Extraire des racines carrées
- Introduire les racines n-ièmes
- Etudier les propriétés des racines n-ièmes

Le cours du chapitre 2

1 Racines carrées

A Théorème fondamental

Le théorème suivant, très long à justifier, est fondamental pour introduire les racines carrées :

Le **théorème 1** se montre facilement en utilisant des théorèmes sur les fonctions numériques mais oblige en contrepartie à retarder l'étude des racines carrées.

Théorème 1 Existence et unicité des racines carrées

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists b \,!\in \mathbb{R}_+, b^2 = a\,.$$

Preuve

Soit a un nombre réel positif.

- Supposons que $a > 1$.

Le cas où $0 \leqslant a \leqslant 1$ est traité plus loin dans la démonstration.

Considérons l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leqslant a\}$ noté A.

La démonstration proposée ci-contre servira comme modèle pour montrer le **théorème 9** pas plus difficile qui est une généralisation.

Montrons que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
C'est déjà par construction un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Il n'est pas vide car il contient 1.
Cet ensemble est majoré par a. En effet, soit y un élément de A.

Le lecteur montrera rapidement que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 1 \Rightarrow x \leqslant x^2$.

Alors $y^2 \leqslant a$ et $a \leqslant a^2$ (car $a > 1$), donc $y^2 \leqslant a^2$ puis $y \leqslant a$.
Ainsi, A admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure b.
On va montrer que $b^2 = a$ en traitant les cas où $b^2 < a$ et $b^2 > a$.
Supposons que $b^2 < a$ et montrons l'existence d'un nombre $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(b+h)^2 < a$.
Soit α un élément de $]0,1[$.
On a : $(b+\alpha)^2 - b^2 = 2\alpha b + \alpha^2$.

$b \geqslant 1$ car $1 \in A$.

Puis comme $b \geqslant 1$ et que $0 < \alpha < 1$, on a $\alpha \leqslant b$, puis $\alpha^2 \leqslant \alpha b$, d'où $\alpha^2 + 2\alpha b \leqslant 3\alpha b$ et donc $(b+\alpha)^2 - b^2 \leqslant 3\alpha b$.

Remarquer que $\dfrac{a-b^2}{3b} > 0$ mais on ne sait pas lequel des deux nombres réels 1 et $\dfrac{a-b^2}{3b}$ est le plus petit.

Ainsi, en choisissant h de l'intervalle ouvert $\left]0, \mathrm{Min}\left(1, \dfrac{a-b^2}{3b}\right)\right[$ on a :

$$(b+h)^2 \leqslant 3hb + b^2 < b^2 + (a - b^2)\,.$$

Il vient alors que $(b+h)^2 < a$, ce qui est contradictoire avec la définition de b car $b+h \in A$ alors que $b+h > b$.
Supposons que $b^2 > a$ et montrons l'existence d'un nombre $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(b-h)^2 > a$.
Soit β un élément de $]0,b[$.
On a : $b^2 - (b-\beta)^2 = 2b\beta - \beta^2$.
Puis, comme $-\beta < \beta < b$, on a $-\beta^2 \leqslant b\beta$ (car $\beta > 0$), d'où $2b\beta - \beta^2 \leqslant 3b\beta$ et donc $b^2 - (b-\beta)^2 \leqslant 3b\beta$.

Remarquer que $\dfrac{b^2-a}{3b} > 0$ mais on ne sait pas lequel des deux nombres réels b et $\dfrac{b^2-a}{3b}$ est le plus petit.

Ainsi, en choisissant h de l'intervalle ouvert $\left]0, \mathrm{Min}\left(b, \dfrac{b^2-a}{3b}\right)\right[$ on a :

$$(b-h)^2 \geqslant b^2 - 3bh > b^2 - (b^2 - a)\,.$$

En effet, pour $y \in A$, on a $y^2 \leqslant a$ d'où $y^2 < (b-h)^2$, soit $y < b-h$.

Il vient alors que $(b-h)^2 > a$ et donc $b-h$ est un majorant de A. La dernière affirmation conduit à une contradiction par définition de b puisque $b - h < b$.
Finalement, $b^2 = a$.

On prouve ainsi l'unicité.

Compte tenu de l'**exercice 1** du **chapitre 1** : $\forall a \in]1,+\infty[, \exists\,!\, b \in \mathbb{R}_+, b^2 = a$.

- Supposons que $a = 0$.

C'est immédiat car $0^2 = 0$.

- Supposons que $a = 1$.

C'est immédiat car $1^2 = 1$.

- Supposons que $0 < a < 1$.

Alors $\dfrac{1}{a} > 1$ car si $\dfrac{1}{a} \leqslant 1$, on aurait $a \leqslant 1$ en multipliant les deux membres de l'inégalité par a.

D'après l'étude du premier cas, il existe un unique $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b^2 = \dfrac{1}{a}$. Il vient donc que $a = \dfrac{1}{b^2} = \left(\dfrac{1}{b}\right)^2$.

Ainsi, dans tous les cas, pour $a \in \mathbb{R}_+$ il existe bien $b \in \mathbb{R}_+$ unique tel que $b^2 = a$. □

Le cours du chapitre 2

Remarques

1. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, l'unique nombre réel positif b tel que $b^2 = a$ est noté $\sqrt{a}$ et s'appelle la **racine carrée** de a.

2. De ce qui précède, quel que soit $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a} \geqslant 0$.

3. $\forall a \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{a})^2 = a$.

4. L'unicité de la racine carrée entraîne que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a^2} = a$ et que pour tout $a \in \mathbb{R}_-^*$, $\sqrt{a^2} = -a$ puisque $a^2 = (-a)^2$.

Ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.

B Propriétés élémentaires de la racine carrée

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur racine carrée :

Théorème 2

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a \leqslant b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}.$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que $a \leqslant b$.

Alors $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$ puis $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ puisque les nombres $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs.

($\Leftarrow$) Immédiat. □

« La racine carrée d'un produit et le produit des racines carrées » :

Le **théorème 3** est important.

Théorème 3

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Preuve

Commençons par remarquer que les nombres réels $\sqrt{ab}$, et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont positifs.

Puis, $(\sqrt{ab})^2 = ab$ et $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$.

Ainsi, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. □

« La racine carrée d'une somme n'est pas toujours égale à la somme des racines carrées », mais :

Théorème 4

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Preuve

Un travail est fait au préalable au brouillon avant de proposer cette preuve.

Puisque $2\sqrt{ab} \geqslant 0$, on a $a + b + 2\sqrt{ab} \geqslant a + b$, soit $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geqslant a + b$, ou encore $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$. □

Théorème 5

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Preuve

Utilisation du **théorème 9** du **chapitre 1**.

Remarquons que comme $a > 0$, les nombres réels $\sqrt{\frac{1}{a}}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$ sont positifs.

Puis, $\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{1}{a}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{a}$.

Ainsi, $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. □

Le **théorème 6** est une conséquence immédiate des **théorèmes 3** et **5** car : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \times \frac{1}{b}} = \sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{a}\,\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Théorème 6

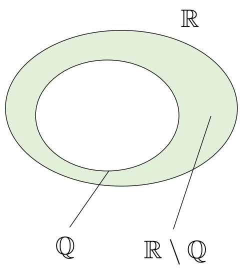
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Le cours du chapitre 2

2 Nombres irrationnels

A Définition

La définition suivante est prévisible :



Définition 1

Dire qu'un nombre réel est **irrationnel** signifie qu'il n'est pas rationnel.

Remarques

1. On note $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.

2. Il existe plusieurs types de nombres irrationnels :
- les nombres **constructibles** ;
- les nombres **algébriques** ;
- les nombres **transcendants**.

Il est en général difficile d'établir l'irrationnalité des nombres réels qui le sont. Pour certains d'entre eux, nous ne savons même pas le démontrer !

Le lecteur sera attentif à l'**exercice 00** du **chapitre 13** du livre Algèbre Licence 1.

3. Nous admettons provisoirement que π (connu depuis le collège) est un nombre irrationnel.

B Propriétés des nombres irrationnels

$-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ compte tenu du **théorème 7-2** ci-dessous.

L'addition n'est pas une loi interne dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ car par exemple, $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$. La multiplication non plus n'est pas une loi interne dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

On dispose cependant du théorème suivant :

Théorème 7

Attention en 2) à ne pas oublier d'exclure le zéro.

1) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \forall y\in\mathbb{Q}, x+y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 2) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \forall y\in\mathbb{Q}^*, xy\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 3) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \frac{1}{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Les preuves sont des raisonnements par l'absurde en remarquant que la somme et le produit de deux nombres rationnels sont rationnels.

Preuve

1) Supposons que $x+y\in\mathbb{Q}$.

Alors $(x+y)-y$ est un nombre rationnel c'est-à-dire x, absurde.

2) Supposons que $xy\in\mathbb{Q}$.

L'inverse d'un nombre rationnel non nul est rationnel

Alors $xy\times\frac{1}{y}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire x, absurde.

3) Remarquons que si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors $x\neq 0$.

Supposons que $\frac{1}{x}\in\mathbb{Q}$.

Alors $\frac{1}{x}\times x$ (donc 1) est un nombre irrationnel d'après 2), ce qui est faux. □

Exemple

Les nombres réels $\sqrt{7}+4$, $2\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\pi}$ sont irrationnels.

Théorème 8

Autrement dit, la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle.

$$\forall x\in\mathbb{R}, x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})_+ \Rightarrow \sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Preuve

Supposons que $x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})_+$ et par l'absurde que $\sqrt{x}\in\mathbb{Q}$.

Alors $(\sqrt{x})^2$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire x, ce qui est contradictoire. □

Exemple

Les nombres réels $\sqrt{\sqrt{6}}$, $\sqrt{4+\pi}$ et $\sqrt{\frac{7}{\sqrt{9}}}$ sont irrationnels.

3 Racines n-ièmes

A Théorème fondamental

Nous allons généraliser le **théorème 1** du cours et ainsi donner naissance aux racines cubiques, quatrièmes etc.

Théorème 9 **Existence et unicité des racines n-ièmes**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, b \in \mathbb{R}_+, b^n = a\,.$$

Preuve

Soient a un nombre réel positif et n un entier naturel non nul.

Le cas où $0 \leqslant a \leqslant 1$ est traité plus loin dans la démonstration.

- Supposons que $a > 1$.

Considérons l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+, x^n \leqslant a\}$ noté A.

Montrons que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
C'est déjà par construction un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Il n'est pas vide car il contient 1.
Cet ensemble est majoré par a. En effet, soit y un élément de A.

Utilisation de l'**exercice 6** du **chapitre 1**.

Alors $y^n \leqslant a$ et $a \leqslant a^n$ (car $a > 1$), donc $y^n \leqslant a^n$ puis $y \leqslant a$.

Ainsi, A admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure b.

On va montrer que $b^n = a$ en traitant les cas où $b^n < a$ et $b^n > a$.

Supposons que $b^n < a$ et montrons l'existence d'un nombre $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(b+h)^n < a$.

Soit α un élément de $]0,1[$.

Remarquez que le terme correspondant à $k=0$ vaut b^n.

Avec le **binôme de Newton** on a : $(b+\alpha)^n - b^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k b^{n-k} - b^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k b^{n-k}$.

$b \geqslant 1$ car $1 \in A$. On utilise de plus le théorème suivant à démontrer par le lecteur : $\forall a \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n \leqslant a$.

Puis, comme $b \geqslant 1$ et que $0 < \alpha < 1$, on a : $\forall l \in \{1,\dots,n\}, \alpha^l b^{n-l} \leqslant \alpha b^{n-1}$.

Donc $(b+\alpha)^n - b^n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha b^{n-1}$ et alors $(b+\alpha)^n - b^n \leqslant (2^n-1)\alpha b^{n-1}$.

Remarquer que $\dfrac{a-b^n}{(2^n-1)b^{n-1}} > 0$ mais on ne sait pas lequel des deux nombres réels 1 et $\dfrac{a-b^n}{(2^n-1)b^{n-1}}$ est le plus petit.

Ainsi, en choisissant h de l'intervalle ouvert $\left]0, \mathrm{Min}\left(1, \dfrac{a-b^n}{(2^n-1)b^{n-1}}\right)\right[$ on a :

$$(b+h)^n \leqslant b^n + (2^n-1)hb^{n-1} < b^n + (a-b^n)\,.$$

Il vient alors que $(b+h)^n < a$, ce qui est contradictoire avec la définition de b car $b+h \in A$ alors que $b+h > b$.

Supposons que $b^n > a$ et montrons l'existence d'un nombre $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(b-h)^n > a$.

Soit β un élément de $]0,b[$.

Avec le **binôme de Newton** on a : $b^n - (b-\beta)^n = b^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k b^{n-k}\beta^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}b^{n-k}\beta^k$.

Puis, comme $b \geqslant 1$ et que $0 < \dfrac{\beta}{b} < 1$, on a : $\forall l \in \{1,\dots,n\}, (-1)^{l+1}b^{n-l}\beta^l = (-1)^{l+1}b^n\left(\dfrac{\beta}{b}\right)^l \leqslant b^n\dfrac{\beta}{b}$.

Donc : $\forall l \in \{1,\dots,n\}, (-1)^{l+1}b^{n-l}\beta^l \leqslant b^{n-1}\beta$ et alors $b^n - (b-\beta)^n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b^{n-1}\beta$, soit $b^n - (b-\beta)^n \leqslant (2^n-1)b^{n-1}\beta$.

Remarquer que $\dfrac{b^n-a}{(2^n-1)b^{n-1}} > 0$ mais on ne sait pas lequel des deux nombres réels b et $\dfrac{b^n-a}{(2^n-1)b^{n-1}}$ est le plus petit.

Ainsi, en choisissant h de l'intervalle ouvert $\left]0, \mathrm{Min}\left(b, \dfrac{b^n-a}{(2^n-1)b^{n-1}}\right)\right[$ on a :

$$(b-h)^n \geqslant b^n - (2^n-1)b^{n-1}h > b^n - (b^n-a)\,.$$

En effet, pour $y \in A$, on a $y^n \leqslant a$ d'où $y^n < (b-h)^n$, soit $y < b-h$.

Il vient alors que $(b-h)^n > a$ et donc $b-h$ est un majorant de A. La dernière affirmation conduit à une contradiction par définition de b puisque $b-h < b$.

Finalement, $b^n = a$.

On prouve ainsi l'unicité.

Compte tenu de l'**exercice 6** du **chapitre 1** : $\forall a \in]1,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, b \in \mathbb{R}_+, b^n = a$.

- Supposons que $a = 0$.

C'est immédiat car $0^n = 0$.

- Supposons que $a = 1$.

C'est immédiat car $1^n = 1$.
- Supposons que $0 < a < 1$.

Alors $\frac{1}{a} > 1$ et d'après l'étude du premier cas, il existe un unique $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b^n = \frac{1}{a}$.

Il vient donc que $a = \frac{1}{b^n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n$.

Ainsi, dans tous les cas, pour $a \in \mathbb{R}_+$ il existe bien $b \in \mathbb{R}_+$ unique tel que $b^n = a$. □

Remarques

1. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, et $n \in \mathbb{N}^*$ l'unique nombre réel positif b tel que $b^n = a$ est noté $\sqrt[n]{a}$ et s'appelle la **racine n-ième** de a (on note classiquement $\sqrt{a}$ pour $\sqrt[2]{a}$).
2. De ce qui précède, quel que soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, (\sqrt[n]{a})^n = a$.
4. L'unicité de la racine n-ième entraîne que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a^n} = a$.
5. Il est clair que : $\forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt[1]{a} = a$.

Mais attention, nous ne donnons pas de sens à la notation $\sqrt[n]{a}$ quand a désigne un nombre réel strictement négatif (même si n est un entier impair).

B Propriétés élémentaires des racines n-ièmes

Théorème 10

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a \leqslant b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}.$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que $a \leqslant b$.

Alors $(\sqrt[n]{a})^n \leqslant (\sqrt[n]{b})^n$ puis $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ puisque les nombres $\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[n]{b}$ sont positifs.

($\Leftarrow$) Immédiat. □

Utilisation de l'**exercice 6** du **chapitre 1**.

Théorème 11

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

Preuve

Commençons par remarquer que les nombres réels $\sqrt[n]{ab}$, et $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ sont positifs.

Puis, $(\sqrt[n]{ab})^n = ab$ et $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$.

Ainsi, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. □

Théorème 12

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}.$$

Preuve

D'une part, $(\sqrt[np]{a})^{np} = a$.

D'autre part, $(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^{np} = \left((\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^n\right)^p = (\sqrt[p]{a})^p = a$.

Ainsi, $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$ car $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} \geqslant 0$ et $\sqrt[np]{a} \geqslant 0$. □

Remarques

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+, \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$.

Théorème 13

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall a \in \mathbb{R}_+, (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}.$$

Le cours du chapitre 2

Preuve

D'une part, $(\sqrt[n]{a^p})^n = a^p$.

D'autre part, $((\sqrt[n]{a})^p)^n = (\sqrt[n]{a})^{np} = ((\sqrt[n]{a})^n)^p = a^p$.

Ainsi, $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$. □

Théorème 14

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} .$$

Preuve

Remarquons que comme $a > 0$, les nombres réels $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ et $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ sont positifs.

Puis, $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^n = \frac{1}{a}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^n = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^n} = \frac{1}{a}$.

Ainsi, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. □

Le **théorème 15** est une conséquence immédiate des **théorèmes 11** et **14** puisque :
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a \times \frac{1}{b}} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \sqrt[n]{a}\ \frac{1}{\sqrt[n]{b}} .$$

Théorème 15

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} .$$

Théorème 16

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} .$$

Preuve

D'une part, $(\sqrt[n]{a+b})^n = a + b$.

D'autre part, par le **binôme de Newton**, $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k} = b + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k} + a$.

Puis, comme $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{a})^k (\sqrt[n]{b})^{n-k} \geqslant 0$, il vient que $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n \geqslant a + b$ et donc $\sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. □

4 Extraction des racines carrées

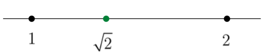
Nous savons donnez une écriture décimale du nombre rationnel $\frac{17}{25}$. Pour cela, on peut poser la division euclidienne de 17 par 25. On trouve sans peine que $\frac{17}{25} = 0{,}68$. Mais à quoi correspondent les chiffres 0, 6 et 8 de cette nouvelle écriture ? Comment les définir ? Nous savons déjà la réponse avec les entiers naturels (**systèmes de numération**). Nous admettons provisoirement que nous pouvons donner de tels écritures avec tous les nombres réels (positifs). On parle alors de **développement décimal** (**limité** ou **illimité**), étudié en licence 2 (**chapitre 6** du livre Analyse Licence 2).

Ce théorème est démontré dans le **chapitre 9** du livre Algèbre Licence 1.

A Approximation par dichotomie

La calculatrice sera systématiquement bannie. Ici, c'est comme à l'ancienne !

Déterminons une approximation du nombre réel $\sqrt{2}$ sans utiliser une calculatrice (cette méthode est très fastidieuse). On commence par donner un encadrement de ce nombre d'amplitude 1.

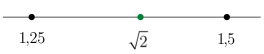


Comme $1 < 2 < 4$, on a via le **théorème 2**, $1 < \sqrt{2} < 2$.

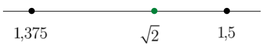
Puis on compare le centre de l'intervalle $]1,2[$ (soit 1,5) et on le compare avec $\sqrt{2}$.

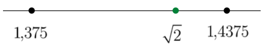
On a $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $1{,}5^2 = 2{,}25$, donc $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Puis on compare le centre de l'intervalle $\left]1, \frac{3}{2}\right[$ (soit 1,25) et on le compare avec $\sqrt{2}$.



On a $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $1{,}25^2 = 1{,}5625$, donc $1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$.





En fait, $\sqrt{2} \approx 1,41421356$.

On a $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $1{,}375^2 = 1{,}890625$, donc $1{,}375 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Le centre suivant est 1,4375 et on le compare avec $\sqrt{2}$.

On a $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $1{,}4375^2 = 2{,}06640625$, donc $1{,}375 < \sqrt{2} < 1{,}4375$.

Le centre suivant est 1,40625 et on le compare avec $\sqrt{2}$.

On a $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $1{,}40625^2 = 1{,}9775390625$, donc $1{,}40625 < \sqrt{2} < 1{,}4375$.

Ainsi $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ (les chiffres 1 et 4 sont des *décimales* exactes).

Comme on le voit, cette méthode n'est pas du tout efficace pour obtenir rapidement des décimales exactes de $\sqrt{2}$. A chaque étape, l'amplitude du nouvel encadrement est divisée par deux (d'où le nom de **dichotomie**).

B « A l'ancienne »

Autrefois, on enseignait aux élèves à extraire des racines carrées « à la main ». Cette méthode, un peu semblable à la pose de la division euclidienne est d'une efficacité redoutable ! Sa justification, délicate, ne sera pas exposé ici.
Des exemples d'extractions de racines carrées seront donnés en vidéo.

Héron d'Alexandrie était un mathématicien grec du 1er siècle après JC.

C Méthode d'Héron

Cette méthode sera exposée dans le **chapitre 6** des suites numériques. Nous en profiterons aussi pour évoquer une autre méthode d'extraction à l'aide de suites dites *adjacentes*.

Les exercices du chapitre 2

1 Démonstration 🖫

Montrer dans <u>cet ordre</u> que :

$$1)\ \sqrt{2}\notin\mathbb{N}\qquad 2)\ \sqrt{2}\notin\mathbb{Z}\qquad 3)\ \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\,.$$

2 Démonstration 🖫

Déterminer tous les couples $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$ tels que :

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\,.$$

3 Démonstration supplémentaire de cours 🖫

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n, \sqrt{\prod_{i=1}^{n}a_i}=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\,.$

4 Démonstration supplémentaire de cours 🖫

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\,.$

5 Démonstration 🖫

Montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|\leqslant\sqrt{|x-y|}\,.$

6 Racines cubiques

Montrer que le nombre réel suivant est un entier naturel :

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\,.$$

7 Racines cubiques

Montrer que le nombre réel suivant est un entier naturel :

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\,.$$

8 Racines n-ièmes 🖫

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}\,.$

9 Inégalité

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}\leqslant\sqrt{n(2^n-1)}\,.$

10 ★ Suite harmonique

On considère la suite harmonique H, définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}, n\sqrt[n]{n+1}-n\leqslant H_n\leqslant n-(n-1)\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\,.$$

11 ★ Inégalité

1) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\,.$$

2) En déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10\,000}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

12 Calcul de somme

Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}E\left(\frac{k+3\sqrt{k}}{k}\right)$.

13 Calcul de somme

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, E((\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2)=4n+1\,.$

14 Irrationalité

Montrer que :

$$1)\ \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}\qquad 2)\ \sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}\notin\mathbb{Q}\,.$$

15 Irrationalité 🖫

Soient x un nombre réel, a, b, c et d des nombres rationnels tels que :

$$x\notin\mathbb{Q}\ \text{ et }\ ad-bc\neq0\,.$$

Montrer que $\frac{ax+b}{cx+d}\notin\mathbb{Q}\,.$

16 Inégalité

Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+, \left|\frac{2x+5}{x+2}-\sqrt{5}\right|\leqslant|x-\sqrt{5}|\,.$

17 Racines carrées

Montrer que le nombre réel suivant est un entier relatif :

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,.$$

18 Racines carrées

Montrer que le nombre réel suivant est un entier naturel :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\,.$$

19 Inégalité 🖫

Montrer que : $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}\,.$

20 Inégalité

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+, (1+x)^n\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{(nx)^k}{k\,!}\,.$

21 Racines cubiques

1) Montrer que :

$$(1+\sqrt[3]{2})^3=\frac{3}{\sqrt[3]{2}-1}\,.$$

2) Montrer que :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\,.$$

22 Racines carrées

Simplifier le plus possible chaque écriture.

$$1)\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}\qquad 2)\ (\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}})^2$$

$$3)\ (\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2\qquad 4)\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,.$$

23 Inégalité 🖫

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant2\sqrt{n}\,.$

24 ★ Racines cubiques

Montrer que le nombre réel suivant est un entier naturel :

$$\frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}\,.$$

Les exercices du chapitre 2

25 Inégalité

1) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in]-1,1[^2, -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 .$$

2) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x+y < (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 < (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3 .$$

26 Borne supérieure et borne inférieure

Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré ou borné dans $\mathbb{R}$.
Donner, s'ils existent, le maximum, la borne supérieure, le minimum et la borne inférieure.

$$1)\ \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leqslant 17\} \qquad 2)\ \{x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant 17\} .$$

27 ⭐ Racines n-ièmes

Montrer que les nombres réels suivants sont des entiers relatifs :

$$1)\ \left(\sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt[4]{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\right)^2 \qquad 2)\ \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[5]{2}}\times\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$3)\ \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}-\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} .$$

28 Nombre irrationnel

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que le nombre $3+\sqrt{5}$ est irrationnel.

2) Montrer que $(3-\sqrt{5})^n \in]0,1[$.

3) Montrer que le nombre $(3-\sqrt{5})^n+(3+\sqrt{5})^n$ est un entier naturel pair.

4) En déduire une expression de la partie entière de $(3+\sqrt{5})^n$.

29 Inégalité

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1$.

30 Irrationnalité

Soient x et y deux nombres rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1) Montrer que le nombre $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

2) Montrer alors que le nombre réel $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

31 Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0,\dots,x_n$ des nombres réels tels que :

$$0 \leqslant x_0 < \dots < x_n \leqslant 1 .$$

Montrer qu'il existe un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que :

$$i \neq j \text{ et } |x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n} .$$

32 Inégalité

Montrer que : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, |\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

33 Racines carrées

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer qu'il existe un couple $(a_n,b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que :

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2 = a_n^2 - 1 .$$

2) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

34 Racines carrées

Soit a un nombre réel supérieur ou égal à 1.
Simplifier l'écriture :

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}} .$$

35 Racines carrées

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha \in \mathbb{N}^*, (1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-1}$.

36 Partie entière

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2})$.

37 Irrationnalité

Montrer que :

$$1)\ \sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \qquad 2)\ \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} .$$

38 Irrationnalité

Soient a, α, b, β des nombres rationnels tels que :

$$b \in \mathbb{Q}_+ ,\ \beta \in \mathbb{Q}_+ ,\ \sqrt{b} \notin \mathbb{Q} .$$

Montrer que :

$$1)\ a+\sqrt{b} = \alpha+\sqrt{\beta} \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \end{cases} \qquad 2)\ a+\sqrt{b} \neq \alpha-\sqrt{\beta} .$$

39 Irrationnalité

Soient a et b deux nombres rationnels positifs.

On suppose qu'il existe un triplet $(A,B,C) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*$ tel que :

$$A\sqrt{a}+B\sqrt{b} = C .$$

Montrer que :

$$\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \text{ et } \sqrt{b} \in \mathbb{Q} .$$

40 Racines cubiques

Montrer que :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{a+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}}+\sqrt{b+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3} .$$

41 ⭐ Inégalité

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j-1} .$$

42 Inégalité

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leqslant \left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

43 ⭐ Comme aux oraux !

Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

D'après oral Polyethnique (2021).

44 Racines cubiques

Montrer que $\sqrt[3]{5}+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

45 Borne inférieure

Soient n un entier naturel non nul et E_n l'ensemble défini par :

$$E_n = \left\{k+\frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\} .$$

Montrer que la borne inférieure de E_n existe et que $\mathrm{Inf}(E_n) \geqslant 2\sqrt{n}$.

Les exercices du chapitre 2

46 **Racines cubiques**

Montrer que le nombre réel suivant est rationnel :

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{41}{243}\sqrt{15}}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}-\frac{41}{243}\sqrt{15}}\,.$$

47 **Borne inférieure**

Soit E l'ensemble défini par :

$$E=\{x\in\mathbb{R}_+^*,\exists(m,n)\in\mathbb{Z}^2,x=m+n\sqrt{2}\}\,.$$

Montrer que la borne inférieure de E existe et qu'elle est nulle.

48 ★ **Irrationnalité** 🖫

On se propose de donner une démonstration du fait que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel en utilisant la structure d'ordre total de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si x est un nombre rationnel positif, alors il existe un entier naturel b non nul tel que bx soit entier.

2) En déduire que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

49 ★ **Somme et partie entière**

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n=\sum_{p=1}^{n^2}E(\sqrt{p})\,.$$

1) Calculer S_1, S_2 et S_3.

2) Exprimer la somme sans le symbole « Σ ».

50 ★ **Borne supérieure et borne inférieure**

Déterminer si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble :

$$\{\sqrt{n}-E(\sqrt{n}),n\in\mathbb{N}^*\}\,.$$