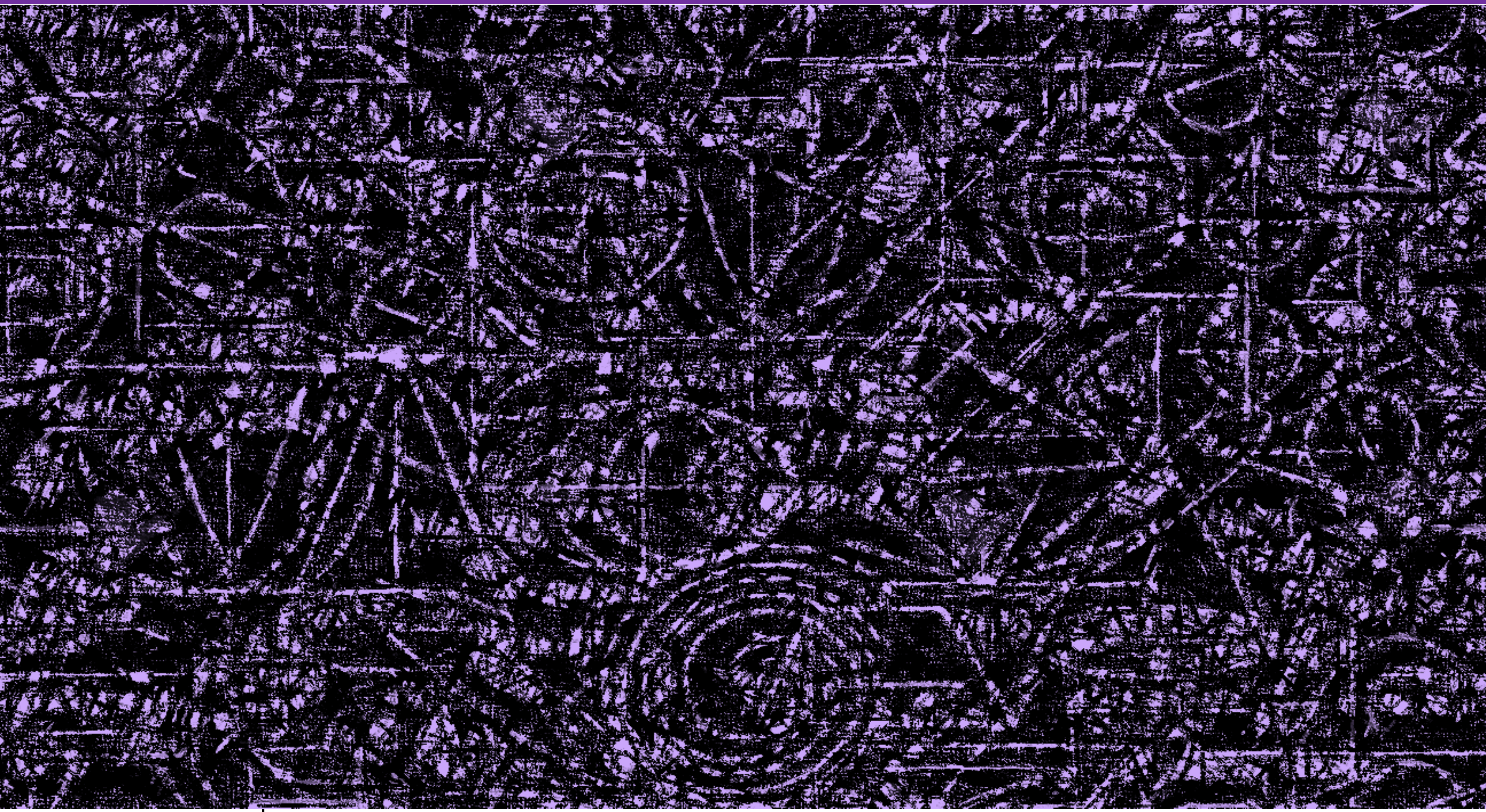
Analyse combinatoire 2



Introduction

L'*analyse combinatoire* est la branche des mathématiques qui s'occupe des configurations finies.
Dans ce chapitre, on s'intéresse aux *arrangements* mais surtout aux *combinaisons*. La notion de *dérangement* et de *combinaison avec répétition* seront étudiées en licence 2.

Dans les exercices, on pourra calculer des sommes qui mettent en jeu des combinaisons, par exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Prérequis

- Théorie des cardinaux (**chapitre 1**)
- Structures algébriques : du magma au groupe (**chapitre 4** du livre Algèbre Licence 1)
- Structures algébriques : de l'anneau au corps (**chapitre 5** du livre Algèbre Licence 1)
- Sommes et produits (**chapitre 6** du livre Algèbre Licence 1)

Objectifs du chapitre

- Introduire la notion d'**arrangement**
- Etude du cardinal de $\mathfrak{S}_n$
- Etude des **combinaisons**
- Démontrer la **relation de Pascal**
- Démontrer la **formule de Vandermonde**
- Démontrer la **formule du multinôme**

Le cours du chapitre 2

1 Arrangements

A Définition

Définition 1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$.

On appelle **arrangement** de p éléments de $\mathbb{N}_n$ tout p-uplet $(x_1, ..., x_p)$ de $(\mathbb{N}_n)^p$ tel que les éléments $x_1, ..., x_p$ soient deux à deux distincts.

On rappelle que $\mathbb{N}_0 = \varnothing$ et que pour tout entier naturel non nul : $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Exemples

1. Le triplet $(1, 3, 5)$ est un arrangement de trois éléments de $\mathbb{N}_4$.
2. Le triplet $(1, 5, 3)$ est un autre arrangement de trois éléments de $\mathbb{N}_4$.

Comme on le constate, l'ordre des éléments compte dans un arrangement.

Remarques

1. Le triplet $(1, 1, 2)$ n'est pas un arrangement de trois éléments de $\mathbb{N}_4$ puisque l'entier 1 est répété.
2. On rappelle qu'on convient qu'un 0-uplet est l'ensemble vide. On peut donc étendre la **définition 1**. Ainsi tout arrangement de 0 élément est l'ensemble vide.

B Nombre d'arrangements

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de $\mathbb{N}_n$ est intimement lié au nombre d'injections de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$.

Pour deux ensembles E et F, nous noterons $\mathcal{J}(E, F)$ l'ensemble des injections de E vers F et $\mathcal{A}(n, p)$ l'ensemble des arrangements de p éléments de $\mathbb{N}_n$.

Par exemple : $\mathcal{A}(3, 2) = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$ $(2, 3), (3, 2)\}$.

Le **théorème 1** permettra de déterminer facilement le nombre d'arrangements de p éléments dans $\mathbb{N}_n$.

Théorème 1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$.

L'application $\begin{aligned} \varphi : \mathcal{J}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n) &\longrightarrow \mathcal{A}(n, p) \\ f &\longmapsto (f(1), ..., f(p)) \end{aligned}$ est bijective.

Preuve

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{J}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ tels que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

On a alors $(f(1), ..., f(p)) = (g(1), ..., g(p))$, soit pour tout k de $\{1, ..., p\}$, $f(k) = g(k)$, soit $f = g$.

L'application φ est par conséquent injective.

Soit Y un élément de $\mathcal{A}(n, p)$.

Il existe alors des éléments $y_1, ..., y_p$ de $\mathbb{N}_n$ deux à deux distincts tels que $Y = (y_1, ..., y_p)$.

On considère l'application $f : \mathbb{N}_p \longrightarrow \mathbb{N}_n$ définie par : $\forall k \in \{1, ..., p\}, f(k) = y_k$.

Il existe alors une application g de $\mathcal{J}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ tel que $Y = \varphi(g)$ (f ci-dessus convient) et l'application φ est surjective.

Finalement, l'application φ est bijective. □

De ce qui précède, il y a autant d'injection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ que d'arrangement de p éléments de $\mathbb{N}_n$. Cette affirmation reste encore vraie quand $n = 0$ ou $p = 0$.

L'ensemble $\mathcal{J}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ est fini car il est inclus dans $\mathcal{A}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ qui est lui-même fini.

On notera $\mathbb{A}_n^p$ le nombre d'arrangement de p éléments de $\mathbb{N}_n$ (quand $p \leqslant n$ avec $n, p \in \mathbb{N}$).

Le **théorème 2** est fondamental.

Théorème 2 Nombre d'arrangements

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de $\mathbb{N}_n$ est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Même si $n = p$, remarquez que le dénominateur ne peut pas s'annuler puisque $0! = 1$.

Preuve

Il revient au même de prouver que le nombre d'injections de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Le cours du chapitre 2

Le théorème relatif à la récurrence finie a été démontré dans le **chapitre 7** du livre Algèbre Licence 1.

On effectue une récurrence finie sur p avec n fixé dans $\mathbb{N}$.

Quand $p=0$, le nombre d'injection de $\varnothing$ dans $\mathbb{N}_n$ est égal à 1 et $\dfrac{n\,!}{(n-0)\,!}=\dfrac{n\,!}{n\,!}=1$.

En effet, toute application de $\{1\}$ dans $\mathbb{N}_n$ est injective. Il suffit ensuite de connaître le nombre d'application de $\{1\}$ dans $\mathbb{N}_n$.

Quand $p=1$, le nombre d'injection de $\{1\}$ dans $\mathbb{N}_n$ est égal à n et $\dfrac{n\,!}{(n-1)\,!}=\dfrac{(n-1)\,!\times n}{(n-1)\,!}=n$.

Soit $p\in[\![1,n-1]\!]$ et supposons que le nombre d'applications injectives de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est égal à $\dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$.

Considérons l'ensemble $\mathbb{N}_{p+1}$ et soit a un élément de $\mathbb{N}_{p+1}$.

L'ensemble $\mathbb{N}_{p+1}\setminus\{a\}$ est alors composé de p éléments.

Pour créer une injection f de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans $\mathbb{N}_n$, on peut :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_{p+1}\setminus\{a\} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N}_p \arrow[dl] \\ \mathbb{N}_n & \end{tikzcd}$$

- créer une injection de $\mathbb{N}_{p+1}\setminus\{a\}$ dans $\mathbb{N}_n$: il y en $\dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$ en appliquant l'hypothèse de récurrence ;

- puis attribuer l'image de a par f : cette image doit être dans $\mathbb{N}_n\setminus f\langle\mathbb{N}_{p+1}\setminus\{a\}\rangle$. Cela revient alors à compter le nombre d'applications de $\{a\}$ vers $\mathbb{N}_n\setminus f\langle\mathbb{N}_{p+1}\setminus\{a\}\rangle$ et il y en a $n-p$.

Ainsi, le nombre d'injection de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans $\mathbb{N}_n$ vaut, en appliquant le **lemme des bergers** :

Lorsqu'on aura des choix successifs à faire, en pratique on multipliera directement le nombre de possibilités.
Il faut savoir que c'est le **lemme des bergers** qui justifie cette technique.

$$\mathcal{J}(\mathbb{N}_{p+1},\mathbb{N}_n)=(n-p)\mathcal{J}(\mathbb{N}_{p+1}\setminus\{a\},\mathbb{N}_n)=(n-p)\frac{n\,!}{(n-p)\,!}=(n-p)\frac{n\,!}{(n-p-1)\,!\,(n-p)}=\frac{n\,!}{(n-(p+1))\,!}.\quad\square$$

Remarque

Ainsi, la notation $\mathbb{A}_n^p$ est toujours définie pour n et p dans $\mathbb{N}$.

On convient que $p>n$, alors $\mathbb{A}_n^p=0$.

2 Permutation

A Généralités

Comme on l'a vu en algèbre (**chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1), quel que soit l'ensemble E, on appelle **permutation** de toute application bijective de E dans E.
Ici, on travaille avec l'ensemble $\mathbb{N}_n$ où n est un entier naturel.

Cet ensemble sera étudié en détail dans le **chapitre 12** du livre Algèbre Licence 1.
La lettre $\mathfrak{S}$ est le « S gothique ». On rencontre donc parfois la simple notation S_n pour le désigner.

On note pour tout entier naturel n non nul, $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

Par exemple, $\mathfrak{S}_1$ désigne l'ensemble $\{\mathrm{Id}_{\{1\}}\}$.

B Cardinal de l'ensemble des permutations

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, combien d'éléments possède l'ensemble $\mathfrak{S}_n$? Voici la réponse :

Théorème 3

Soit n un entier naturel non nul.

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)=n\,!.$$

Preuve

D'après le **théorème 20** du **chapitre 1**, toute permutation de $\mathbb{N}_n$ est aussi une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$.

Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)=\mathrm{Card}(\mathcal{J}(\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_n))=\dfrac{n\,!}{(n-n)\,!}=\dfrac{n\,!}{0\,!}=n\,!$. $\square$

3 Combinaisons

A Définition

Les combinaisons ont été étudiées en terminale. Nous redéfinissons cette notion.

Définition 2

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p\leqslant n$.

On appelle **combinaison** de p éléments de $\mathbb{N}_n$ tout sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ de cardinal p.

Le cours du chapitre 2

Exemples

Cet fois-ci l'ordre ne compte pas. Ainsi, l'ensemble $\{5{,}1{,}3\}$ n'est pas une combinaison différente de la combinaison $\{1{,}3{,}5\}$.

1. L'ensemble $\{1{,}3{,}5\}$ est une combinaison de trois éléments de $\mathbb{N}_4$.
2. $\mathbb{N}_4$ est une combinaison de quatre éléments de $\mathbb{N}_4$.

Remarques

1. Une combinaison de zéro élément correspond à l'ensemble vide.

Dans tous les autres cas, ce ne sont pas les mêmes objets.

2. Une combinaison de zéro élément et un arrangement de zéro élément coïncident (puisque cela correspond à $\varnothing$).

B Nombre de combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \leqslant p$.

Notons $\mathcal{C}(n, p)$ le nombre de combinaison de p éléments de $\mathbb{N}_n$.

Le **théorème 4** est fondamental.

Théorème 4 Nombre de combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \leqslant p$.

Le nombre de combinaison de p éléments de $\mathbb{N}_n$ est égal à $\dfrac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$.

Preuve

L'application $\varphi : \mathcal{A}(n,p) \longrightarrow \mathcal{C}(n,p)$ est clairement surjective.
$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \{x_1, \dots, x_p\}$

En effet, $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_p) = p\,!$.

De plus, chaque élément de $\mathcal{C}(n, p)$ admet $p\,!$ antécédents.

En appliquant le **lemme des bergers**, il vient que :

$$\frac{n\,!}{(n-p)\,!} = \mathrm{Card}(\mathcal{A}(n,p)) = p\,!\,\mathrm{Card}(\mathcal{C}(n,p))\,.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}(n,p)) = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}\,. \qquad \square$$

Remarques

1. On notera $\dbinom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de $\mathbb{N}_n$ (quand $p \leqslant n$ avec $n, p \in \mathbb{N}$).
2. Si $p > n$, $\mathbb{A}_n^p = 0$ et donc $\dbinom{n}{p} = 0$.

Ainsi, la notation $\binom{n}{p}$ est toujours définie pour $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

3. On prolonge la définition en posant $\dbinom{n}{p} = 0$ si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_-^*$.

C Propriétés des combinaisons

Les théorèmes suivants sont à connaître par cœur :

Le **théorème 5** est d'usage constant en pratique.

Théorème 5

Soit n un entier naturel.

$$1)\ \binom{n}{0} = 1 \qquad 2)\ \binom{n}{1} = n \qquad 3)\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad 4)\ \binom{n}{n} = 1\,.$$

Preuve

1) $\dbinom{n}{0} = \dfrac{n\,!}{0\,!\,(n-0)\,!} = \dfrac{n\,!}{n\,!} = 1$.

2) Si $n = 0$, alors $\dbinom{n}{1} = 0$, sinon (donc si $n \geqslant 1$), $\dbinom{n}{1} = \dfrac{n\,!}{1\,!\,(n-1)\,!} = \dfrac{n(n-1)\,!}{(n-1)\,!} = n$.

3) Si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $\dbinom{n}{2} = 0$ et $\dfrac{n(n-1)}{2} = 0$.

Le cours du chapitre 2

Puis, pour $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n\,!}{2\,!\,(n-2)\,!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\,!}{2(n-2)\,!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

4) $\binom{n}{n} = \dfrac{n\,!}{n\,!\,(n-n)\,!} = \dfrac{n\,!}{n\,! \times 0\,!} = \dfrac{n\,!}{n\,!} = 1$. □

La première égalité du **théorème 6** est très utilisée en pratique. Quant à la deuxième, elle est moins utilisée.

L'égalité 2) est parfois appelée la « **petite formule** ». Elle est en général exploitée par l'égalité :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Théorème 6

Soient n un entier naturel et p un entier relatif.

$$1)\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad 2)\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}\ \ ((n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*).$$

Preuve

Nous avons étendu très fortement la définition des combinaisons. Cela nous oblige donc à traiter beaucoup de cas particuliers dans les démonstrations.

1) Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!(n-n+p)\,!} = \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!\,p\,!} = \binom{n}{p}$.

Pour $p < 0$, on a $\binom{n}{p} = 0$ et $\binom{n}{n-p} = 0$ car dans ce cas $n-p > n$.

Pour $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$ et $\binom{n}{n-p} = 0$ car dans ce cas $n-p < 0$.

2) Supposons que $0 < p \leqslant n$.

On a : $\dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \dfrac{n}{p} \times \dfrac{(n-1)\,!}{(p-1)\,!\,(n-p)\,!} = \dfrac{n(n-1)\,!}{p(p-1)\,!\,(n-p)\,!} = \dfrac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!} = \binom{n}{p}$.

Dans le cas où $p < 0$, on a $\binom{n}{p} = 0$ et $\dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \dfrac{n}{p} \times 0 = 0$.

Dans le cas où $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$ et $\dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \dfrac{n}{p} \times 0 = 0$. □

Exemples

1. $\binom{47}{45} = \binom{47}{2} = \dfrac{47 \times 46}{2} = 47 \times 23 = 1081$.
2. $\binom{5}{3} = \dfrac{5}{3} \times \binom{4}{2} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{4 \times 3}{2} = 10$.

Le **théorème 7** est fondamental. On l'a déjà utilisé en algèbre dans la démonstration du **binôme de Newton**.

Théorème 7 — **Formule de Pascal**

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Preuve

Plusieurs cas sont à traiter (il y a cinq cas !)

- Supposons que $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

Cette condition assure que $p \leqslant n$. Ainsi, les trois combinaisons sont simultanément manipulables.

On a :
$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!} + \frac{n\,!}{(p+1)\,!\,(n-p-1)\,!} = \frac{(p+1)n\,!}{(p+1)p\,!\,(n-p)\,!} + \frac{(n-p)n\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)(n-p-1)\,!} \\ &= \frac{(p+1)n\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)\,!} + \frac{(n-p)n\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)\,!} \\ &= \frac{(p+1)n\,! + (n-p)n\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)\,!} \\ &= \frac{(n+1)n\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)\,!} \\ &= \frac{(n+1)\,!}{(p+1)\,!\,(n-p)\,!} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

- Supposons que $p = n$.

Alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0 = 1$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

- Supposons que $p > n$.

Puisque $p > n$, $p+1 > n+1 > n$.

Alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = 0 + 0 = 0$ et $\binom{n+1}{p+1} = 0$.

- Supposons que $p = -1$.

Alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = 0 + 1 = 1$ et $\binom{n+1}{p+1} = 1$.

- Supposons que $p < -1$.

Puisque $p < -1$, $p+1 < 0$.

Alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = 0 + 0 = 0$ et $\binom{n+1}{p+1} = 0$. □

Théorème 8 **Formule de Pascal généralisée**

$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{n}{p}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Preuve

Il est possible de démontrer cette égalité sans utiliser une récurrence. Le lecteur pourra le faire dans l'**exercice 1**.

Récurrence sur n avec p fixé dans $[\![0, n]\!]$.

Quand $n = 0$, on a $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = 1$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{0+1}{0+1} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Deux cas sont à traiter pour $0 \leqslant p \leqslant n+1$:

Nous avons donné aucun sens à la notation $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ quand $p = n+1$ (ou de manière générale quand $p > n$), d'où la séparation des cas.

- si $p \leqslant n$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{(n+1)+1}{p+1}$;

- si $p = n+1$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et $1 = \binom{n+2}{n+2} = \binom{(n+1)+1}{p+1}$.

Ainsi, dans tous les cas, pour n fixé dans $\mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n+1$, $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$. □

Le théorème suivant est parfois utilisé dans les exercices :

Théorème 9 **Formule de Vandermonde**

La formule de Vandermonde est un grand classique en dénombrement. Cette formule serait dû au mathématicien français **Alexandre-Théophile Vandermonde** (1735-1796).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Preuve

Attention, ici la récurrence ne se fait pas sur n (cela serait très difficile) mais sur b.

Récurrence sur b avec n et a fixés dans $\mathbb{N}$.

On remarque que les termes de la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ s'annule tous quand $b = 0$ sauf dans le cas où $k = n$.

Donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{0}{n-k} = \binom{a}{n}\binom{0}{0} = \binom{a}{n}$, ce qui correspond bien au membre de droite quand b est nul.

Soit $b \in \mathbb{N}$ et supposons que $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

On va traiter deux cas.

- Supposons que $n = 0$: alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k} = \binom{a}{0}\binom{b+1}{0} = 1$ et $\binom{a+b+1}{0} = 1$.

Le cours du chapitre 2

- Supposons que $n > 0$: d'après la **relation de Pascal**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\left[\binom{b}{n-k}+\binom{b}{(n-1)-k}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{(n-1)-k}$$

Pour le second terme, le terme de la somme pour $k = n$ est nul.

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a}{k}\binom{b}{(n-1)-k}$$

Hypothèse de récurrence appliquée aux deux termes de la somme.

$$= \binom{a+b}{n}+\binom{a+b}{n-1}$$

Utilisation de la **formule de Pascal**.

$$= \binom{a+b+1}{n}.$$

□

D Binôme de Newton

Le binôme de Newton a déjà été démontré en algèbre (**théorème 11** du **chapitre 3** du livre Algèbre Licence 1). Aussi, nous le rappelons ci-dessous :

Théorème 10 **Binôme de Newton**

Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau, x et y deux éléments commutant de A.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Rappelons qu'on convient, pour un élément x d'un anneau A : $x^0 = 1_A$.

Plaçons-nous à présent dans $\mathbb{R}$ (son étude est anticipée).
Comment peut-on développer efficacement pour x et y dans $\mathbb{R}$, $(x+y)^6$?
On sait déjà que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Dans la dernière écriture, les nombres entiers se trouvant au-devant des variables x et y sont appelés **coefficients binomiaux**.
Ces coefficients sont calculables de proche en proche grâce au **triangle de Pascal**.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	...	$p-1$	p
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
				+						
4	1	4 +	6	4	1					
			=	+						
5	1	5	10	10	5	1				
					=					
6	1	6	15	20	15	6	1			
$\vdots$		$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}$				$\sum_{k=3}^{5}\binom{k}{3}=\binom{6}{4}$		$\ddots$		
$n-1$	1	$n-1$	$\cdots$					$\cdots$	$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$
n	1	n	$\cdots$							$\binom{n}{p}$

Les coefficients binomiaux au-dessus de la « diagonale de 1 » sont nuls car dans ce cas on a $p > n$.

Un coefficient binomial est obtenu en ajoutant les deux coefficients binomiaux qui lui sont au-dessus ».

L'égalité $\sum_{k=3}^{5}\binom{k}{3}=\binom{6}{4}$ illustre la **formule de Pascal généralisée**.

Le cours du chapitre 2

D'après le **binôme de Newton** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k y^{n-k}$.

Remarquer que d'une part les puissances de x augmentent alors que les puissances de y diminuent (pour une lecture de gauche à droite).

Donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^6 = \binom{6}{0} x^0 y^6 + \binom{6}{1} x^1 y^5 + \binom{6}{2} x^2 y^4 + \binom{6}{3} x^3 y^3 + \binom{6}{4} x^4 y^2 + \binom{6}{5} x^5 y^1 + \binom{6}{6} x^6 y^0$.

Les valeurs de $\binom{6}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, correspond à la « ligne 6 » du **triangle de Pascal** dont les coefficients sont :

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

On en déduit que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^6 = 1x^0y^6 + 6x^1y^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y^1 + 1x^6y^0,$$

soit écrit plus joliment,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

Deux conséquences du **binôme de Newton** sont à connaître :

Théorème 11

Attention à l'exclusion de 0 pour le 2). Ainsi, on évite le cas litigieux 0^0.

$$1)\ \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad 2)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Preuve

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$. □

Remarque

La première égalité permet de proposer une autre démonstration du **théorème 30** du **chapitre 1**.

Considérons un ensemble E fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$).

Montrons que $\mathcal{P}(E)$ est fini et que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Les ensembles de la réunion sont deux à deux disjoints (par unicité du cardinal).

On sait que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$ et que : $\forall (i,j) \in \{0,\dots,n\}^2, i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E) = \varnothing$.

Or, pour tout k de $\{0,\dots,n\}$, $\mathcal{P}_k(E)$ est fini (réunion d'ensembles finis) donc $\mathcal{P}(E)$ est fini.

Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Le théorème suivant généralise le **binôme de Newton** :

Théorème 12 **Formule du multinôme**

Commutant deux à deux signifie : $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i x_j = x_j x_i$.

Les entiers naturels $k_1,\dots,k_m$ ont pour somme n et peuvent être nuls.

La notation $\binom{n}{k_1,\dots,k_m}$ désigne les **coefficients multinomiaux** et : $\binom{n}{k_1,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!}$.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_m$ des éléments d'un anneau $(A,+,\cdot)$ commutant deux à deux.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(x_1 + \dots + x_m\right)^n = \sum_{\substack{(k_1+\dots+k_m) \in \mathbb{N}^m \\ k_1+\dots+k_m = n}} \binom{n}{k_1,\dots,k_m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i}.$$

Preuve

Le membre de droite donne en détail : $\frac{n!}{k_1!} x_1^n = \frac{n!}{n!} x_1^n = x_1^n$.

Récurrence sur m avec n fixé dans $\mathbb{N}$.

Le cas où $m=1$ est immédiat et le cas où $m=2$ est le **binôme de Newton**.

En effet, $\left(x_1 + x_2\right)^n = (x_1+x_2)^n = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k_1,k_2} \prod_{i=1}^{2} x_i^{k_i} = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{k_2=n-k_1} \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} x_1^{k_1} x_2^{n-k_1}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k}.$$

Voir l'**exercice 00** du **chapitre 3**.

Le cours du chapitre 2

Soit $m \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et supposons que $\left(x_1 + \ldots + x_m\right)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_m = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i}$.

Application de l'hypothèse de récurrence.

On a : $\left(x_1 + \ldots + x_{m+1}\right)^n = \left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i + (x_m + x_{m+1})\right)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_{m-1}+K = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_{m-1}, K} \prod_{i=1}^{m-1} x_i^{k_i} (x_m + x_{m+1})^K$

Utilisation du **binôme de Newton** au dernier terme de la somme.

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_{m-1}+K = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_{m-1}, K} \prod_{i=1}^{m-1} x_i^{k_i} \sum_{k_m+k_{m+1} = K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_{m-1}+k_m+k_{m+1} = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_{m-1}, K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} \prod_{i=1}^{m-1} x_i^{k_i} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_{m-1}+k_m+k_{m+1} = n} \frac{n\,!}{k_1\,!\ldots k_{m-1}\,!\,K\,!} \times \frac{K\,!}{k_m\,!\,k_{m+1}} \prod_{i=1}^{m+1} x_i^{k_i}$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_{m-1}+k_m+k_{m+1} = n} \frac{n\,!}{k_1\,!\ldots k_{m-1}\,!\,k_m\,!\,k_{m+1}\,!} \prod_{i=1}^{m+1} x_i^{k_i}$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_{m+1} = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_{m+1}} \prod_{i=1}^{m+1} x_i^{k_i} \ . \qquad \square$$

Les exercices du chapitre 2

1 Démonstrations supplémentaires de cours

Démontrer le **théorème 8** du cours sans utiliser une démonstration par récurrence (preuve directe par le calcul).

2 Calcul de sommes

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

3 Calcul de sommes

Soient n et p deux entiers naturels avec n non nul.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}.$$

4 Calcul de sommes

Montrer que : $\forall (n,\, p) \in \mathbb{N}^2, \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k}\binom{p+q-k}{p-k} = 2p\binom{p+q}{p}$.

5 Calcul de sommes

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

6 Calcul de sommes

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.

7 Calcul de sommes

1) Montrer que :

$$\forall (n,\, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \sum_{k=0}^{p} k \binom{n}{p-k}\binom{n}{k} = n\binom{2n-1}{p-1}.$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

8 Calcul de sommes

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

9 Calcul de sommes

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

10 ★ Formule de Vandermonde généralisée

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (n,\, p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}^{k+1}, \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \prod_{j=1}^{k} \binom{p_j}{i_j} = \binom{p_1+\ldots+p_k}{n}.$$

11 Calcul de sommes

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

12 Calcul de sommes

Soient x et y deux nombres complexes.

Montrer que :

$$\forall (p,\, q) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{k} x^{p-k}y^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q+k}{k}(x-y)^{p-k}y^k.$$

13 ★ Calcul de sommes

1) Montrer que :

$$\forall (n,\, p,\, q) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q} = \binom{n}{p}\binom{n}{q}.$$

2) En déduire que :

$$\forall (n,\, p,\, q) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q} = \binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}.$$

3) En déduire aussi que :

$$\forall (n,\, p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2 \binom{n+2p-k}{2p} = \binom{n+p}{p}^2.$$

14 ★ Calcul de sommes

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \left[\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right]^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

15 Calcul de sommes

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Montrer que :

$$(R_n)^2 + (S_n)^2 = 2^n.$$

16 ★★ Binôme de Newton

Soient n un entier naturel non nul, x et y deux nombres réels strictement positifs.

Quel est le plus grand terme dans le développement de $(x+y)^n$ par la formule du **binôme de Newton** ?

17 ★★ Combinaisons

Soit $(n,\, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p+3$.

1) Montrer que les entiers $\binom{n}{p}$, $\binom{n}{p+1}$, $\binom{n}{p+2}$ et $\binom{n}{p+3}$ ne forment pas une progression arithmétique.

2) Montrer qu'il existe une infinité de couples $(n,\, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que :

$$0 \leqslant p \leqslant n \text{ et } 2\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p+1}.$$

18 ★ Equation binomiale

Résoudre dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ l'équation d'inconnue n :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

19 ★★ Calcul de sommes

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2n-1}{k}}\binom{n}{k}$.

Les exercices du chapitre 2

20 ★★ Système binomiale

Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation d'inconnue (n, p) :

$$\begin{cases} \dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{p+1} \\ 4\dbinom{n}{p} = 5\dbinom{n}{p-1} \end{cases}.$$

21 ★★ Calcul de sommes

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{n+k} = n\binom{2n-1}{n}.$$

2) En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \max(k,l)\binom{n}{k}\binom{n}{l} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \min(k,l)\binom{n}{k}\binom{n}{l}.$$

22 ★ Suite de Fibonacci 🖫

On considère la **suite de Fibonacci** définie par :

$$\begin{cases} \phi_0 = 0, \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}.$$

1) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \phi_k$.

2) Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\phi_{m+k} = \phi_{m+2n}.$$

23 ★★ Suite harmonique

On considère la **suite harmonique**, définie par :

$$\begin{cases} H_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{cases}.$$

1) a) Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

b) Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{k}{m}.$$

2) a) Montrer que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right).$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n.$$

24 Combinaisons

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}, \dbinom{\binom{n}{2}}{2} = 3\dbinom{n+1}{4}$.

25 ★ Equation binomiale

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$.

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation d'inconnue x :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-x}{p-x}.$$

26 Calcul de sommes

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\frac{1}{\binom{n}{k}}\binom{n}{k+1}$.

27 ★ Calcul de produits 🖫

On note pour tout entier naturel n :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!}.$$

28 ★★ Calcul de sommes

Calculer pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{p}{p+q-k} \times \frac{1}{\binom{p+q}{k}}\binom{q}{k}$.

29 ★★ Calcul de sommes

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n!)^{(n-1)!} \mid (n!)!$.

30 Calcul de sommes

Montrer que : $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} (p-2k)\binom{p}{k} = q\binom{p}{q}$.

31 Calcul de sommes

Soit n, p et q des entiers naturels tels que $p \geqslant n+q+1$.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{q}{p-k} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n}{q+1}.$$

32 ★★ Calcul de sommes

Montrer que : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{p-1} (i+j)$.

33 Calcul de sommes 🖫

Calculer pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1) \ \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2k} \qquad 2) \ \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2k+1}.$$

34 ★★ Calcul de sommes

Montrer que : $\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{p}{n-k}\binom{q}{k} = \frac{np}{p+q}\binom{n}{p+q}$.

35 Calcul de sommes

Calculer pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

Les exercices du chapitre 2

36 Calcul de sommes

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tel que $n \geqslant 2p$.

Calculer :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p-k}\binom{n}{p+k}.$$

37 ★ Calcul de sommes

Soient k et n deux entiers naturels tel que $3k \leqslant n+1$.

1) Montrer que :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \binom{n}{i} \leqslant \frac{1}{2^{k-i}} \binom{n}{k}.$$

2) En déduire que :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leqslant 2 \binom{n}{k}.$$

38 ★★★ Combinaisons 🖫

Soit n un entier naturel.

En utilisant l'écriture de l'entier n en base 2, déterminer le nombre d'entiers impairs parmi les entiers $\binom{n}{k}$ ($0 \leqslant k \leqslant n$).

39 Calcul de sommes 🖫

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

40 ★★ Calcul de sommes

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

41 Démonstrations supplémentaires de cours 🖫

Montrer que : $\forall (n, k, i) \in \mathbb{N}^3, \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$.

42 ★ Sommes classiques

Pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on note :

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

1) Montrer que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

2) En déduire que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

3) Retrouver ainsi les valeurs des sommes classiques :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

43 ★ Calcul de sommes

Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$.

44 ★★ Calcul de sommes

Soient p et q deux entiers naturels. On note :

$$E = \{0,1\}^{p+q+1}, \ A = \left\{(x_1, \dots, x_{p+q+1}) \in E, \sum_{i=1}^{p+q+1} x_i \geqslant p+1\right\}, \ B = \overline{A}.$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, q\}$, on note A_k l'ensemble des éléments de E de la forme $(x_1, \dots, x_{p+1})$ et tels que :

$$\sum_{i=1}^{p+k} x_i = p \text{ et } x_{p+k+1} = 1.$$

1) Montrer que :

$$\operatorname{Card}(A_k) = \binom{p+k}{p} 2^{q-k}.$$

2) En déduire le cardinal de A et de B.

3) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^{p+k}} \binom{p+k}{p} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^{q+k}} \binom{q+k}{q} = 2.$$

4) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{p} 2^i \binom{2p-i}{p} = 2^{2p}.$$

45 Calcul de sommes 🖫

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

46 ★★ Calcul de sommes

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n!(n+2)S_n = (1+(-1)^n)(n+1)!$.

2) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

47 Calcul de sommes

Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{n}$.

48 Equation binomiale du second degré

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - \binom{n}{p} x + \binom{n-1}{p-1}\binom{n-1}{p} = 0.$$

49 Equation binomiale

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnue x :

$$\binom{x}{3} + \binom{x+1}{2} = 14.$$

50 Combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels tels que $2 \leqslant p \leqslant n-2$.

Montrer que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}.$$

Les exercices du chapitre 2

51 ★ **Formule de Pascal généralisée** 🖫

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

En utilisant la **formule de Pascal généralisée** :

1) Calculer :

$$\sum_{j=0}^{n} (j+1)(j+2)\ldots(j+k-1)\,.$$

2) Retrouver la valeur de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,.$$

52 **Calcul de sommes**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k}$.

53 **Calcul de sommes**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$.

54 **Equation binomiale**

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnue n :

$$\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}.$$

55 **Calcul de sommes**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k \binom{n}{k}$.

56 ★ **Combinaisons** 🖫

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leqslant \dbinom{2n}{n}$.

57 ★ **Calcul de sommes**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}\binom{n}{k} \qquad 2)\ \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}\binom{n}{k}.$$

58 ★ **Calcul de sommes**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)\binom{n}{k}$.

59 **Calcul de sommes**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 4^{n-k}\binom{2n-p+1}{k}$.

60 ★★ **Equation binomiale**

Soient n, p et q des entiers naturels tels que $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$.

1) Montrer que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow (p=q) \vee (p+q=n)\,.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnue n :

$$\binom{2n+4}{3n-1} = \binom{2n+4}{n^2-2n+3}.$$

61 **Calcul de sommes**

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Montrer que :

$$1)\ \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \qquad 2)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0\,.$$

62 ★★★ **Calcul de sommes**

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\binom{p+k-1}{k} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{p+n-1}{k}.$$