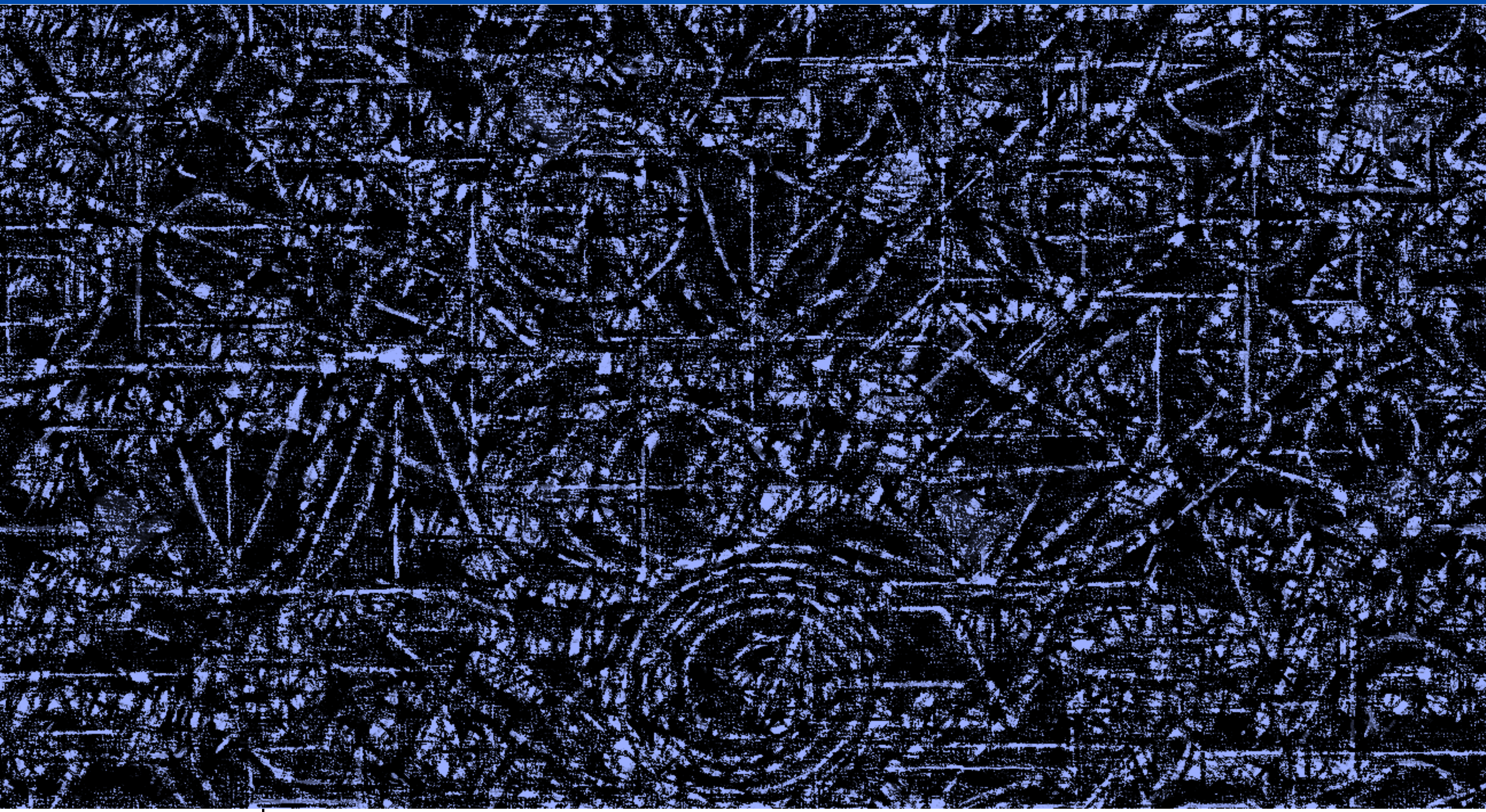
Groupe symétrique

12



Introduction

Après un premier mémoire sur l'utilisation des permutations dans la résolution des équations algébriques, Cauchy publia en 1844 un ouvrage majeur où pour la première fois les permutations furent étudiées comme un sujet à part entière.

Evariste Galois (1811-1831) était un mathématicien français.

En 1831, Galois fut le premier mathématicien à comprendre que la résolution des équations algébriques est reliée à la structure d'un certain **groupe de permutation** qui lui est associé.
Bien que cela semble assez élémentaire, à l'époque les définitions modernes n'existaient pas, et lorsque Cayley a introduit ce qu'on appelle maintenant les groupes, il n'était pas immédiatement clair que cela était équivalent aux groupes connus auparavant, qui sont maintenant appelés groupes de permutation.

Prérequis

- Fonctions et applications (**chapitre 3**)
- Structures algébriques : du magma aux groupes (**chapitre 4**)
- Dénombrements classiques (**chapitre 3** du livre **Probabilités Licence 1**)

Objectifs du chapitre

- Etudier la structure du groupe des permutations
- Démontrer le **théorème de Cayley**
- Etudier les **transpositions**
- Etudier la signature d'une permutation
- Introduire le **groupe alterné**

Le cours du chapitre 12

1 Définition et premières propriétés

On rappelle qu'on note $\mathbb{N}_0 = \varnothing$ et pour tout entier naturel non nul, $\mathbb{N}_n = [\![1, n]\!]$.

Cet ensemble sera toujours manipulé avec n non nul.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N}_n)$ des permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

A Un nouveau groupe

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème 1

Pour tout entier naturel n non nul, le couple $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

Ce résultat est en réalité plus général. En effet, on démontre de la même manière que si E est un ensemble non vide, alors le couple $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe. Mais rappelons également que le couple $(E^E, \circ)$ n'est pas un groupe (si $\#(E) \geqslant 2$).

Preuve

La loi $\circ$ est interne dans $\mathfrak{S}_n$: en effet, on sait que la composée de deux bijections est une bijection.

C'est le **théorème 4** du **chapitre 3**.

La loi $\circ$ est associative : en effet, la composée d'applications (et donc *à fortiori* des bijections) est associative.

La loi $\circ$ admet un élément neutre : en effet, l'application $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ est neutre pour $\circ$ dans $\mathfrak{S}_n$.

Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est symétrisable pour $\circ$: en effet, pour toute application bijective de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, il existe une application bijective de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Ce sont les **théorèmes 18** et **20** du **chapitre 3**.

Ainsi, le couple $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe. □

Remarque

Le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est classiquement appelé le **groupe symétrique** (d'ordre n). Il nous sera utile dans le **chapitre 21** lors de l'étude des *déterminants*.

B Motivations

Pourquoi allons-nous étudier le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ seulement et pas les autres groupes de permutations ? La réponse provient du théorème suivant :

Théorème 2

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective entre ensembles non vides.

L'application $\varphi : \begin{array}{l}(\mathfrak{S}(E), \circ) \longrightarrow (\mathfrak{S}(F), \circ)\\ \sigma \mapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}\end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Le **théorème 2** est plutôt une bonne nouvelle. En effet, à un isomorphisme près, le groupe des permutations d'ensembles équipotents est le même.
Il est alors naturel de prendre le groupe des permutations le plus simple.

Preuve

Commençons par remarquer que l'application φ est bien définie.

En effet, l'application $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ a pour ensemble de départ et d'arrivée F et est une composée d'applications bijectives.

Soient σ et σ' deux éléments appartenant à $\mathfrak{S}(E)$.

On a : $\varphi(\sigma) \circ \varphi(\sigma') = (f \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \sigma' \circ f^{-1}) = f \circ \sigma \circ (f^{-1} \circ f) \circ \sigma' \circ f^{-1} = f \circ (\sigma \circ \sigma') \circ f^{-1} = \varphi(\sigma \circ \sigma')$.

Donc l'application $\varphi : (\mathfrak{S}(E), \circ) \longrightarrow (\mathfrak{S}(F), \circ)$ est un morphisme de groupes.

Il reste à montrer que l'application φ est bijective.

Utilisation du **théorème 20** du **chapitre 3**.

L'application $\varphi' : \begin{array}{l}\mathfrak{S}(F) \longrightarrow \mathfrak{S}(E)\\ \sigma \mapsto f^{-1} \circ \sigma \circ f\end{array}$ est bien définie et vérifie $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}(F)}$ et $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}(E)}$.

Donc φ est bien bijective et d'application réciproque φ'. □

Remarque

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble fini, non vide et de cardinal n.

On sait alors que $E \simeq \mathbb{N}_n$ et d'après le théorème précédent, $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) = \mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n) = n\,!$.

Deux ensembles finis et équipotents ont le même cardinal.

La deuxième motivation (vraiment ?) de l'étude du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ provient du théorème suivant :

Théorème 3 **Théorème de Cayley**

Soit $(G, *)$ un groupe.

Il existe un sous-groupe H du groupe $(\mathfrak{S}(G), \circ)$ tel que $G \simeq H$.

Le **théorème 3** est très abstrait, il dit simplement que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation.
Il nous sera utile en licence 3 pour démontrer un des théorèmes les plus célèbres des groupes finis.

On rappelle (**définition 11** du **chapitre 4**) que l'application γ_a désigne la translation à gauche par a.

Preuve

Considérons l'application $\varphi : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathfrak{S}(G) \\ a \mapsto \gamma_a \end{array}$.

L'application φ est bien définie (**théorème 16** du **chapitre 4**).

Montrons ensuite que φ est un monomorphisme de groupes de $(G,*)$ sur $(\mathfrak{S}(G),\circ)$.

Soient a et b deux éléments de G.

On a : $\varphi(a*b) = \gamma_{a*b}$, puis pour tout x de G, $\gamma_{a*b}(x) = (a*b)*x$.

On a aussi : $\varphi(a)\circ\varphi(b) = \gamma_a \circ \gamma_b$, puis pour tout x de G, $(\gamma_a\circ\gamma_b)(x) = \gamma_a(\gamma_b(x)) = a*(\gamma_b(x)) = a*(b*x)$.

De plus, comme la loi $*$ est associative dans G, il vient que $\varphi(a*b) = \varphi(a)\circ\varphi(b)$.

$\forall x \in G, \gamma_a(x) = \gamma_b(x) \Rightarrow a*x = b*x$
$\Rightarrow (a*x)*x^{-1} = (b*x)*x^{-1}$
$\Rightarrow a = b$.

L'application φ est injectif car si a et b sont deux éléments de G tels que $\varphi(a)=\varphi(b)$, alors $\gamma_a = \gamma_b$, soit $a=b$.

Enfin, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$ (**théorème 27** ou **28** du **chapitre 4**) et l'application $\varphi|^{\mathrm{Im}(\varphi)}$ est bien une bijection de G sur $\mathrm{Im}(\varphi)$, c'est-à-dire qu'il existe bien un isomorphisme de groupes de $(G,*)$ sur $(\mathrm{Im}(\varphi),\circ)$. □

Remarque

Soit n un entier naturel et $(G,*)$ un groupe fini d'ordre n.

D'après le **théorème de Cayley**, le groupe $(G,*)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

C Manipulation du groupe symétrique

Soient n un entier naturel non nul et σ un élément de $\mathfrak{S}_n$.

On représente en général la permutation σ sous la forme d'une matrice $2\times n$ (deux lignes et n colonnes) comme suit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la permutation σ de $\mathfrak{S}_4$ définie par $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=4$, $\sigma(3)=1$ et $\sigma(4)=3$ aura pour écriture :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de la permutation σ se déduit facilement en inversant les images et les antécédents :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le lecteur remarquera que :
$\sigma\cdot\sigma^{-1} = \mathrm{Id}_{[1,4]}$ et $\sigma^{-1}\circ\sigma = \mathrm{Id}_{[1,4]}$.

La composée de deux permutations (abusivement appelé produit de deux permutations) se calcule aussi facilement. Par exemple, pour les permutations σ et σ' définies par les égalités :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

on a les produits suivants :

$$\sigma\circ\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma'\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $(\sigma\circ\sigma')(3) = \sigma(\sigma'(3))$
$= \sigma(4)$
$= 3$.

La composée $\sigma\circ\sigma'$ peut être abusivement notée $\sigma\sigma'$.

Comme on vient de le voir, $\sigma\circ\sigma' \neq \sigma'\circ\sigma$.

2 Transpositions

A Définition

La définition suivante est délicate :

Les transpositions sont les permutations les plus remarquables.
Noter qu'il est nécessaire que $n \geqslant 2$ pour parler de transposition.
D'autres permutations remarquables existent :
- les *cycles* (non traitées ici) ;
- l'application identité.

Définition 1

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ tels que $i<j$.

On appelle **transposition** échangeant i et j la permutation notée $\tau_{i,j}$ de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ définie par :

$$\begin{cases} \tau_{i,j}(i) = j, \tau_{i,j}(j) = i \\ \forall k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,j\}, \tau_{i,j}(k) = k \end{cases}.$$

Remarques

1. Une transposition ne fait « qu'échanger deux éléments » distincts en laissant les autres éléments invariants.

Le cours du chapitre 12

2. La transposition $\tau_{i,j}$ peut aussi être notée simplement (i, j).

Par exemple, dans $\mathfrak{S}_5$, la transposition $(1,3)$ est la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

La démonstration de ce résultat est immédiate : une transposition revient à considérer l'échange de deux éléments seulement pris parmi n éléments.

3. Pour $n \geqslant 2$, il y a $\binom{n}{2}$ transpositions dans $\mathfrak{S}_n$.

4. Dans la définition, on a imposé $i < j$, mais on peut simplement supposer que $i \neq j$. Dans ce cas l'écriture $(3,1)$ est autorisée et les transpositions $(1,3)$ et $(3,1)$ sont égales.

Ainsi, si σ désigne une transposition, alors $\sigma^{-1} = \sigma$.

5. Il est clair que par définition, une transposition est involutive (attention l'inverse est faux en général).
6. Attention, la composée de deux transpositions n'est pas toujours une transposition.

B Théorème fondamental des transpositions

Le théorème suivant est fondamental pour décomposer une permutation en produit de transpositions :

Le **théorème 4** dit simplement que toute permutation de $\{1, ..., n\}$ est décomposable en un produit de transpositions.

Théorème 4 Théorème fondamental des transpositions

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Il existe un entier naturel N non nul et des transpositions $\tau_1, ..., \tau_N$ de $\{1, ..., n\}$ telles que :

$$\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_N .$$

La démonstration est délicate.

Preuve

Récurrence sur n.

Pour $n = 2$, on a $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}_{\{1,2\}}, \tau_{1,2}\}$.

On convient qu'une transposition est le produit d'une seule transposition : elle-même.

Pour l'élément $\tau_{1,2}$ c'est ok.

Pour l'élément $\mathrm{Id}_{\{1,2\}}$, on a $\mathrm{Id}_{\{1,2\}} = \tau_{1,2}^2$.

Soit $n \geqslant 2$ et supposons qu'il existe un entier naturel N non nul et des transpositions $\tau_1, ..., \tau_N$ de $\{1, ..., n\}$ telles que $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_N$.

Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Il y a deux cas à traiter suivant l'image de $n+1$ par σ.

- Supposons que $\sigma(n+1) = n+1$.

Comme l'application σ est bijective, l'application $\sigma' : \begin{array}{l} \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\} \\ k \mapsto \sigma(k) \end{array}$ est bien définie et est une permutation de $\{1, ..., n\}$.

En effet, $\sigma(\{1, ..., n\}) \subset \{1, ..., n\}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel N non nul et des transpositions $\tau_1', ..., \tau_N'$ de $\{1, ..., n\}$ telles que $\sigma' = \tau_1' \circ ... \circ \tau_N'$.

Pour tout i de $\{1, ..., N\}$, l'application $\tau_i : \begin{array}{l} \{1, ..., n+1\} \longrightarrow \{1, ..., n+1\} \\ k \mapsto \begin{cases} \tau_i'(k) \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ n+1 \text{ si } k = n+1 \end{cases} \end{array}$ est une transposition de $\{1, ..., n+1\}$

Cette égalité provient du fait qu'on a déjà $\sigma' = \tau_1' \circ ... \circ \tau_N'$; il suffit ensuite de prolonger les transpositions à l'entier $n+1$ et de se souvenir qu'on a $\sigma(n+1) = n+1$.

et on a de plus $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_N$.

- Supposons que $\sigma(n+1) < n+1$.

Posons $\rho = \tau_{\sigma(n+1),n+1} \circ \sigma$.

Puisque $\tau_{\sigma(n+1),n+1}$ et σ sont des permutations de $\mathfrak{S}_{n+1}$, il en est de même pour ρ.

De plus, $\rho(n+1) = \tau_{\sigma(n+1),n+1}(\sigma(n+1)) = n+1$.

D'après le premier cas, il existe un entier naturel N non nul et des transpositions $\tau_1, ..., \tau_N$ de $\{1, ..., n+1\}$ telles que :

$$\rho = \tau_1 \circ ... \circ \tau_N .$$

Rappelons que toute transposition est involutive.

Donc $\tau_1 \circ ... \circ \tau_N = \tau_{\sigma(n+1),n+1} \circ \sigma$, d'où $\sigma = \tau_{\sigma(n+1),n+1} \circ \tau_1 \circ ... \circ \tau_N$. □

La démonstration précédente est constructive et nous fournit donc un algorithme pour décomposer toute permutation en un produit de transpositions.

C Décomposition d'une permutation

Décomposons la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{S}_5$ en un produit de transpositions.

On commence par le dernier entier 5 mais ce n'est pas obligatoire.

En notant σ cette permutation, on constate que $\sigma(5) \neq 5$ mais que $\sigma(5) = 2$.

On va donc changer la position de 2 et 5.

On a alors : $\sigma = \tau_{2,5} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

On change la position de deux entiers sur la seconde ligne.

Pour la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, l'image de 4 vaut 1. On échange alors la position de 1 et 4.

On a alors : $\sigma = \tau_{2,5} \circ \tau_{1,4} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On continue de la même manière en échangeant la position des entiers 1 et 3 puis des entiers 1 et 2.

On a ainsi : $\sigma = \tau_{2,5} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{2,5} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} \circ \mathrm{Id}_{\{1,\ldots 5\}} = \tau_{2,5} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$.

Remarques

1. La décomposition d'une permutation en un produit de transpositions n'est pas unique.
Par exemple, en commençant à échanger la position des entiers 1 et 5, on trouve :

$$\sigma = \tau_{1,5} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{1,5}.$$

2. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

L'algorithme précédent montre que la permutation σ est décomposable, d'au moins une façon en un produit d'au plus n transpositions. Bien évidemment, le nombre de transpositions peut être supérieur.

En revanche, on verra juste après que la parité de ce nombre de transpositions est une caractéristique de la permutation.
Par exemple, la permutation ci-dessus a été décomposée en 4 et 6 transpositions. Elle ne pourra jamais être décomposée en un nombre impair de transpositions.

3 Signature d'une permutation

A Inversion d'une permutation

La notion d'inversion permet de définir la notion de **signature**.

Définition 2

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

On appelle **inversion** de σ tout couple (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Remarque
On note $\mathrm{I}(\sigma)$ le nombre d'inversion de la permutation σ.

Exemple
Considérons la permutation σ définie par l'égalité :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer facilement le nombre d'inversion de cette permutation, on compte pour chacun des nombres entiers de la deuxième ligne combien il y en a de plus petits qui sont écrits après lui.
La somme de ces nombres est le nombre d'inversions de la permutation.
Pour l'entier 5 : 4 entiers lui sont inférieurs parmi les entiers 3, 4, 1 et 2.
Pour l'entier 3 : 2 entiers lui sont inférieurs parmi les entiers 4, 1 et 2.
Pour l'entier 4 : 2 entiers lui sont inférieurs parmi les entiers 1 et 2.
Pour l'entier 1 : aucun.
Pour l'entier 2 : aucun.
Ainsi, $\mathrm{I}(\sigma) = 4 + 2 + 2 = 8$.

Si on voulait compter le nombre d'inversions de la permutation σ sans cette astuce il faudrait vérifier parmi les 20 couples d'entiers de $\{1, \ldots, 5\}^2$, ceux présentant une inversion. Ce qui semble moins trivial.

B Signature d'une permutation

La signature d'une permutation est liée à la parité du nombre d'inversions. Ce qui conduit à la définition suivante :

Le cours du chapitre 12

Définition 3

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

On appelle **signature** de σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$ et défini par :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{I}(\sigma)}.$$

Remarques

1. On dit que la permutation σ est **pair** quand $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Autrement dit, quand $\mathrm{I}(\sigma)$ est pair.

2. On dit que la permutation σ est **impair** quand $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Autrement dit, quand $\mathrm{I}(\sigma)$ est impair.

3. Pour $n \geqslant 2$, l'application $\mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$ a pour signature 1 puisque son nombre d'inversion est nul.

Exemple

La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour signature 1 car son nombre d'inversion (8 au total) est pair.

Cette permutation est donc paire.

Le théorème suivant donne explicitement une formule sans passer par les inversions pour déterminer la signature d'une permutation.

Le **théorème 5** ne s'applique jamais en pratique. C'est un résultat théorique qui nous sera utile pour le théorème suivant.

Théorème 5

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Preuve

Il est clair que comme σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, l'application $\begin{array}{rcl} \sigma' : \mathcal{P}_2(\{1,\ldots,n\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_2(\{1,\ldots,n\}) \\ \{i,j\} & \mapsto & \{\sigma(i), \sigma(j)\} \end{array}$ est une bijection.

En effet, l'application : $\begin{array}{rcl} \sigma'' : \mathcal{P}_2(\{1,\ldots,n\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_2(\{1,\ldots,n\}) \\ \{i,j\} & \mapsto & \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\} \end{array}$, vérifie $\sigma' \circ \sigma'' = \sigma'' \circ \sigma' = \mathrm{Id}$.

Il vient de ce qui précède que :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |j - i|.$$

Puis, comme aucun des facteurs du second produit est nul :

$$\frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\sigma(j) - \sigma(i)|}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |j - i|} = 1.$$

La dernière écriture s'écrit plus simplement :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{|\sigma(j) - \sigma(i)|}{|j - i|} = 1.$$

On obtient alors :

« La valeur absolue d'un quotient est le quotient des valeurs absolues ». Les propriétés de la valeur absolue sont étudiées dans le **chapitre 1** du livre Analyse Licence 1.

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left| \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right| = 1.$$

Finalement :

« La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues ».

$$\left| \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right| = 1.$$

Ainsi, on a soit $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = -1$, soit $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = 1$.

La première égalité se produit quand le nombre de facteurs négatifs est impair, autrement dit quand le nombre d'inversions est impair et alors la signature de la permutation σ vaut -1.

Pour i et j dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ (avec $i < j$), si on a :
$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} < 0,$$
alors $(\sigma(j) - \sigma(i))(j - i) < 0$ et donc le couple (i, j) présente une inversion.

La seconde égalité se produit quand le nombre de facteurs négatifs est pair (ou tout simplement lorsque tous les facteurs sont positifs mais dans ce cas il n'y a pas d'inversion et la signature de la permutation est égale à 1), autrement dit quand le nombre d'inversions est pair et alors la signature de la permutation σ vaut 1.

De ce qui précède, il vient que :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

□

Le cours du chapitre 12

Grâce au **théorème 6**, il est possible de déterminer la signature d'un produit de permutations : il suffit de multiplier les signatures des permutations.

Théorème 6

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

L'application $\begin{array}{rcl}\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) \\ \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma)\end{array}$ est un épimorphisme de groupes.

Preuve

L'application ε est clairement surjective via le **théorème 7** ci-dessous et du fait que l'application identité est une permutation paire (donc de signature égale à 1).

Soient σ et ρ deux permutations de $\mathfrak{S}_n$.

L'application ρ étant injective, la différence $\rho(j)-\rho(i)$ est non nul.

On a : $$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma\circ\rho) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\sigma(\rho(j))-\sigma(\rho(i))}{j-i} &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{\sigma(\rho(j))-\sigma(\rho(i))}{\rho(j)-\rho(i)}\times\frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i}\right)\\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\sigma(\rho(j))-\sigma(\rho(i))}{\rho(j)-\rho(i)}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i}\\ &= \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}\frac{\sigma(l)-\sigma(k)}{l-k}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i}\\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho)\,.\end{aligned}$$ □

Rappelons que l'application : $\begin{array}{rcl}\mathcal{P}_2(\{1,\dots,n\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_2(\{1,\dots,n\}) \\ \{i,j\} & \mapsto & \{\rho(i),\rho(j)\}\end{array}$, est une bijection.

Remarques

1. De ce qui précède, la composée de deux permutations de même parité est paire et la composée de deux permutations de parités différentes est impaire.
2. D'après le **théorème 26** du **chapitre 4**, une permutation et sa réciproque ont la même parité.

En effet, pour toute permutation σ : $\varepsilon(\sigma^{-1}) = (\varepsilon(\sigma))^{-1} = \varepsilon(\sigma)$.

Théorème 7

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$.

$$\varepsilon(\tau) = -1\,.$$

Autrement dit, toute transposition de $\{1,\dots,n\}$ est impaire.

Preuve

Considérons deux éléments i et j de $\{1,\dots,n\}$ tels que $i<j$.

En supposant que $i=1$ et $j=n$, on trouve $\mathrm{I}(\tau_{1,n}) = 2n-3$ et donc $\varepsilon(\tau_{1,n}) = -1$.

Ce calcul est expliqué en vidéo.

Supposons maintenant que $1<i<j<n$.

On a :
$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

Les couples présentant une inversion sont : $(i,i+1),(i,i+2),\dots,(i,j),(i+1,j),(i+2,j),\dots,(j-1,j)$.

Ainsi, $\mathrm{I}(\tau_{i,j}) = j-(i+1)+1+(j-1)-(i+1)+1 = 2(j-i)-1$, et alors $\varepsilon(\tau_{i,j}) = -1$. □

On retrouve la quantité $2n-3$ quand $i=1$ et $j=n$.

Remarque

Attention ! Il existe dans $\mathfrak{S}_4$ des permutations impaires qui ne sont pas des transpositions.

En revanche, dans $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$ les permutations impaires sont les transpositions.

Par exemple, la permutation $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ est bien impaire (3 inversions) bien qu'elle ne soit pas une transposition.

Ainsi, dans $\mathfrak{S}_4$, il y a les permutations paires (dont l'identité) et les permutations impaires (dont les transpositions).

Théorème 8

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$, N un entier naturel non nul et des transpositions $\tau_1,\dots,\tau_N$ de $\{1,\dots,n\}$ tels que $\sigma = \tau_1\circ\dots\circ\tau_N$.

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^N\,.$$

Le **théorème 8** est une conséquence immédiate des **théorèmes 6** et **7**.
Ce résultat peut être utile si par exemple une permutation se voit comme un produit de transpositions sans qu'on ait d'autre infos sur la permutation (par exemple les images de chaque entier naturel).

Remarque

D'après le **théorème 8**, une permutation paire ne peut être le produit que d'un nombre pair de transpositions et une permutation impaire ne peut être le produit que d'un nombre impair de transpositions. En particulier, l'application identité est toujours le produit d'un nombre pair de transposition.

Rappelons que dans $\mathfrak{S}_2$, $\mathrm{Id} = \tau_{1,2}^2$.

Le cours du chapitre 12

C Groupe alterné

Le « A » gothique se note « $\mathfrak{A}$ ».

Autrement dit, $\mathfrak{A}_n$ est l'ensemble des permutations paires de $\{1, \dots, n\}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Notons $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble défini par l'égalité :

$$\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{A}_n$ est appelé le **groupe alterné** d'ordre n.

Le théorème suivant est très prévisible :

Théorème 9

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Preuve

Comme on le sait déjà, l'application signature $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes.

Utilisation du **théorème 28** du **chapitre 4**.

On sait aussi que le noyau de ce morphisme est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

On conclut donc en remarquant que $\text{Ker}(\varepsilon) = \mathfrak{A}_n$. □

Le **théorème 10** apporte une information capitale : il y a autant de permutations paires que de permutations impaires.

Théorème 10

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = \frac{n!}{2}.$$

Preuve

Ainsi $\mathfrak{B}_n$ est l'ensemble des permutations impaires de $\{1, \dots, n\}$.

Notons $\mathfrak{B}_n = \overline{\mathfrak{A}_n}$ (complémentaire dans $\mathfrak{S}_n$).

Considérons l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathfrak{A}_n \longrightarrow \mathfrak{B}_n \\ \sigma \longmapsto \tau \circ \sigma \end{array}$ où τ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Ainsi, l'image d'une permutation paire est impaire.

Notons déjà que cette application est bien définie. En effet, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma) = -1$.

L'application $\gamma : \begin{array}{l} \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathfrak{A}_n \\ \sigma \longmapsto \tau^{-1} \circ \sigma \end{array}$ est telle que $\gamma \circ \varphi = \text{Id}_{\mathfrak{A}_n}$ et $\varphi \circ \gamma = \text{Id}_{\mathfrak{B}_n}$.

Donc l'application φ est bijective (d'application réciproque γ) et alors $\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = \text{Card}(\mathfrak{B}_n)$.

La réunion ci-contre est disjointe.

De plus, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{B}_n$, d'où $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = \text{Card}(\mathfrak{A}_n) + \text{Card}(\mathfrak{B}_n) = 2\,\text{Card}(\mathfrak{A}_n)$.

Par suite, $\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = \dfrac{\text{Card}(\mathfrak{S}_n)}{2} = \dfrac{n!}{2}$. □

4 Etude approfondie du groupe symétrique

A Groupe symétrique d'ordre 1

L'étude est immédiate car $\mathfrak{S}_1 = \{\text{Id}\}$ et le couple $(\mathfrak{S}_1, \circ)$ est un groupe commutatif.

Exercice 111 du **chapitre 4**.

Rappelons également qu'il n'existe qu'un seul groupe fini d'ordre 1 (à un isomorphisme près).

B Groupe symétrique d'ordre 2

On a $\mathfrak{S}_2 = \{\text{Id}, \tau_{1,2}\}$, où :

$$\tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dressons la table de Cayley associée :

$\circ$	Id	$\tau_{1,2}$
Id	Id	$\tau_{1,2}$
$\tau_{1,2}$	$\tau_{1,2}$	Id

Via cette table, on constate que le couple $(\mathfrak{S}_2, \circ)$ est commutatif.

Exercice 120 du **chapitre 4**.

Rappelons également qu'il n'existe qu'un seul groupe fini d'ordre 2 (à un isomorphisme près).
Ainsi, les groupes $(\mathfrak{S}_2, \circ)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et $(\{-1,1\}, \times)$ sont isomorphes.

C Groupe symétrique d'ordre 3

On a $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \rho, \theta\}$, où :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Classiquement dans $\mathfrak{S}_3$, on note respectivement les transpositions $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ et $\tau_{2,3}$: τ_3, τ_2 et τ_1.

Dressons la table de Cayley associée :

$\circ$	Id	ρ	θ	τ_1	τ_2	τ_3
Id	Id	ρ	θ	τ_1	τ_2	τ_3
ρ	ρ	θ	Id	τ_2	τ_3	τ_1
θ	θ	Id	ρ	τ_3	τ_1	τ_2
τ_1	τ_1	τ_3	τ_2	Id	θ	ρ
τ_2	τ_2	τ_1	τ_3	ρ	Id	θ
τ_3	τ_3	τ_2	τ_1	θ	ρ	Id

On a mis en évidence (en bleu) la table de Cayley du groupe alterné associé.

Jusqu'ici, nous n'avons pas eu d'exemple de groupe fini et non commutatif.

Comme on peut le constater sur la table, $\tau_1 \circ \rho = \tau_3$ mais $\rho \circ \tau_1 = \tau_2$. Ainsi le groupe $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ n'est pas commutatif.
En licence 3, on démontrera qu'il n'existe que deux groupes finis d'ordre 6 (à un isomorphisme près) : les groupes $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ et $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

D Groupe symétrique d'ordre supérieur ou égal à 3

Le théorème suivant est prévisible :

Théorème 11

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ n'est pas commutatif.

Preuve

Le cas où $n = 3$ a été traiter plus haut.
Supposons que $n \geqslant 4$ et considérons deux permutations σ et ρ de $\mathfrak{S}_n$ définies par les égalités :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Les entiers supérieurs ou égaux à 4 ont la même image par les deux applications.

On a $(\sigma \circ \rho)(1) = \sigma(\rho(1)) = 3$ et $(\rho \circ \sigma)(1) = \rho(\sigma(1)) = 2$, donc $\sigma \circ \rho \neq \rho \circ \sigma$. □

Compte tenu de ce qu'on vient de démontrer, il est naturel de s'intéresser au centre du groupe symétrique :

Théorème 12

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, le centre du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est trivial.

Autrement dit, $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$.
Le cas de $\mathfrak{S}_2$ n'apporte rien puisqu'il est commutatif.

Preuve (non exigible)

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 3, i et j deux entiers de $\{1, \dots, n\}$ tel que $i < j$.
Soit enfin σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
1) On va montrer dans un premier temps que les permutations σ et $\tau_{i,j}$ commutent si et seulement si l'ensemble $\{i, j\}$ est stable par σ.

Autrement dit si et seulement si : $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$.

Supposons donc que les permutations σ et $\tau_{i,j}$ commutent.
On a d'une part $(\sigma \circ \tau_{i,j})(i) = (\tau_{i,j} \circ \sigma)(i) = \tau_{i,j}(\sigma(i))$, donc $\sigma(j) = \tau_{i,j}(\sigma(i))$.
D'autre part, $(\sigma \circ \tau_{i,j})(j) = (\tau_{i,j} \circ \sigma)(j) = \tau_{i,j}(\sigma(j))$, donc $\sigma(i) = \tau_{i,j}(\sigma(j))$.
Comme σ est une permutation, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ et donc nécessairement $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$ ou $\sigma(i) = i$ et $\sigma(j) = j$.

Donc : $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$.

Réciproquement, supposons que l'ensemble $\{i, j\}$ est stable par σ.
On a d'une part, en supposant en plus que $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$, on a $\sigma(j) = \tau_{i,j}(\sigma(i))$ et $\sigma(i) = \tau_{i,j}(\sigma(j))$.

D'autre part, en supposant cette fois que $\sigma(j)=i$ et $\sigma(i)=j$, on a aussi $\sigma(i)=\tau_{i,j}(\sigma(j))$ et $\sigma(j)=\tau_{i,j}(\sigma(i))$.

Il vient alors que $\sigma(\tau_{i,j}(i))=\tau_{i,j}(\sigma(i))$ et $\sigma(\tau_{i,j}(j))=\tau_{i,j}(\sigma(j))$.

Cela provient du fait que l'ensemble : $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,j\}$, est stable par σ.

Enfin, pour tout k de $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,j\}$, on a $\sigma(\tau_{i,j}(k))=\sigma(k)=\tau_{i,j}(\sigma(k))$.

Finalement : $\sigma\circ\tau_{i,j}=\tau_{i,j}\circ\sigma$.

2) Il est clair que la permutation Id commute avec toutes les permutations.
Réciproquement, supposons que pour une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ on a :

$$\forall\rho\in\mathfrak{S}_n, \sigma\circ\rho=\rho\circ\sigma .$$

On va montrer que $\sigma(i)=i$.

Soit i un élément de $\{1,\ldots,n\}$.

L'entier naturel n étant supérieur ou égal à 3, il existe deux entiers j et k de $\{1,\ldots,n\}$ tel que les entiers i, j et k soient deux à deux distincts.
Par hypothèse, la permutation σ commute avec les transpositions $\tau_{i,j}$ et $\tau_{i,k}$.

Donc les parties $\{i,j\}$ et $\{i,k\}$ sont stables par σ, d'où $\sigma(i)=i$.

Ainsi, $\sigma=\mathrm{Id}$ et alors $\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)=\{\mathrm{Id}\}$. □

Les exercices du chapitre 12

1 Signature d'une permutation

Soit σ la permutation de $\mathfrak{S}_6$ définie par l'égalité :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Décomposer la permutation σ en produit de transpositions.

2) Déterminer sa signature.

2 Signature d'une permutation

Soit σ la permutation de $\mathfrak{S}_8$ définie par l'égalité :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Décomposer la permutation σ en produit de transpositions.

2) Déterminer sa signature.

3 Nombre d'inversions

Soient σ et ρ les permutations de $\mathfrak{S}_6$ définies par les égalités :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les permutations σ^{-1} et ρ^{-1}.

2) Dénombrer le nombre d'inversions des permutations σ et ρ.

3) Dénombrer le nombre d'inversions des permutations composées $\sigma \circ \rho$ et $\rho \circ \sigma$.

4 Décomposer une permutation

Soit σ la permutation de $\mathfrak{S}_{12}$ définie par l'égalité :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 1 & 5 & 12 & 6 & 3 & 9 & 4 & 2 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver le nombre d'inversions et la parité de la permutation σ.

2) Décomposer la permutation σ en produit de transpositions.

5 Signature d'une permutation 🖫

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que l'application σ définie par :

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad k \mapsto n+1-k$$

est une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

2) Déterminer la signature de la permutation σ.

6 Signature d'une permutation 🖫

Soit n un entier naturel non nul.

Déterminer la signature de la permutation σ définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

7 ★ Signature d'une permutation 🖫

Soit n un entier naturel non nul.

Déterminer la signature de la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}.$$

8 ★ Arithmétique et groupe symétrique

Soient n un entier naturel impair et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Montrer que le nombre $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\sigma(k) - k)$ est un entier relatif pair.

9 ★★ Groupe alterné 🖫

Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{n+2}$.

10 ★ Commutativité générale 🖫

Soit $(E, +)$ un demi-groupe commutatif.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

11 ★★ Isomorphisme 🖫

Soient p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant q$.

Montrer que $\mathfrak{S}_p$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_q$.

12 Arithmétique et groupe symétrique

Soient n un entier naturel impair et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Montrer que le nombre entier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left((\sigma(k))^k - k^2\right)$ est divisible par 4.

13 ★★ Groupe symétrique

Soient n un entier naturel non nul et E l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Pour $p \in \{0, \dots, n\}$ et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$, on note E_p l'ensemble des parties de E à p éléments et $\sigma_p : E_p \longrightarrow E_p$ l'application définie par :

$$\forall A \in E_p, \sigma_p(A) = \sigma\langle A \rangle.$$

1) Montrer que l'application σ_p est bijective.

2) Vérifier que pour toute permutation σ et τ de $\mathfrak{S}_n$:

$$(\tau \circ \sigma)_p = \tau_p \circ \sigma_p \text{ et } \sigma_p^{-1} = (\sigma^{-1})_p.$$

3) Montrer que pour tout p de $\{1, \dots, n-1\}$, l'application :

$$\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}(E)_p, \quad \sigma \mapsto \sigma_p$$

est injective.

14 Signature d'une permutation

Soit σ la permutation de $\mathfrak{S}_7$ définie par l'égalité :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la signature de la permutation σ.

15 Composition de permutations

Soient σ et ρ les permutations de $\mathfrak{S}_6$ définies par les égalités :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les permutations $\sigma \circ \rho$ et $\rho \circ \sigma$.

2) Déterminer la permutation $(\sigma \circ \rho)^{-1}$.

16 Signature d'une permutation

Soient σ et ρ les permutations de $\mathfrak{S}_8$ définies par les égalités :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la signature des permutations σ et ρ.