QR : Graphes

Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.

Question 1 *Qu'est-ce qu'une chaîne d'Euler ? Un graphe eulérien ? Un graphe semi-eulérien ?*

Question 2 *Comment démontrer le théorème d'Euler ?*

Question 3 *A partir de la matrice d'un graphe, que pouvez-vous dire des chemins menant de i à j ?*

Question 4 *Connaissez-vous les chaînes de Markov ?*

Question 5 *On considère un graphe G et un sous-graphe g. Que peut-on dire des nombres chromatiques Δ_G et Δ_g de ces graphes ?*

Compendium 1 [1]*{Relevé sur [1]} Dans sa leçon, le candidat a défini les graphes semi-eulériens sans les utiliser dans la suite de l'exposé.*

Jury *: "Vous avez introduit les graphes semi-eulériens, mais vous ne vous en servez pas dans la suite. Que pourriez-vous en faire ?"*

Candidat *: "On peut parfois se ramener à un graphe semi-eulérien. Dans mon exemple, si je rajoute un pont, mon graphe devient semi-eulérien, et je pourrai me servir de la propriété des graphes semi-eulériens".*

Jury *: "Quelle est cette propriété ?"*

Candidat *: "Il s'agit de la propriété (P) : Un graphe connexe est semi-eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs ou si deux seulement de ses sommets sont de degrés impairs."*

Jury *: "Sauriez-vous démontrer cette propriété (P) concernant les graphes connexes semi-eulériens à partir des graphes connexes eulériens ?"*

Candidat *: "Soit G un graphe connexe. S'il est semi-eulérien, je peux trouver un chemin eulérien d'extrémités A et B. Si $A = B$, j'ai une chaîne eulérienne, donc G est un graphe eulérien. D'après le résultat que l'on me demande d'admettre sur les graphes eulériens (à savoir : "un graphe connexe est eulérien*

[0] [ugra0001qr] v1.00 Site internet : MegaMaths

[0] Leçon d'oral n°2 de la session 2007 du CAPES externe traitée dans le Vol I de "l'Epreuve d'exposé" [2].

[1] Compendium = Brève synthèse d'une totalité.

si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs"), tous les sommets de G sont de degrés pairs. Et d'un. Si par contre $A \neq B$, je rajoute une arête d'extrémités A et B et j'obtiens un nouveau graphe G' qui est eulérien. Donc tous ses sommets sont de degrés pairs, et cela implique que tous les sommets de G sont de degrés pairs sauf exactement deux.
La réciproque se démontrerait de la même manière en rajoutant au besoin une arête au bon endroit !"

Compendium 2 *{Relevé sur [1]} Le candidat a donné la définition de la matrice d'un graphe.*

Jury *: "Que peut-on remarquer au sujet des coefficients de la matrice d'un graphe ?"*

Candidat *: "Si le graphe est simple (non orienté), il s'agit d'une matrice symétrique : les coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale principale."*

Jury *: Quel est l'intérêt des ces matrices ? En probabilité par exemple ?"*

Jury *: Connaissez les chaînes de Markov ?*

Candidat *: (...) [Le candidat parlera de la matrice de transition d'un graphe probabiliste, par exemple en donnant un exemple semblable au problème du manoir hanté ([2], Problème 5), du fait que ces matrices explicient le changement d'état d'un système et permettent d'étudier convenablement des suites de probabilités... ([2], §. 2.1.5, 2.2. et 2.2.4). Pour la définition des chaînes de Markov, on se reportera à la Question 4.]*

Eléments de réponses

$\boxed{\textbf{Réponse 1}}$ Un cycle eulérien (resp. une chaîne eulérienne) d'un graphe G est un cycle (resp. une chaîne) qui contient une et une seule fois chacune des arêtes de G .
Un graphe est dit eulérien (resp. semi-eulérien) s'il possède un cycle eulérien (resp. une chaîne eulérienne).

$\boxed{\textbf{Réponse 2}}$ La version suivante du Théorème d'Euler est démontrée dans le Vol. I :

Théorème 1 *{[2], Th. 9} Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il possède* 0 *ou* 2 *sommets de degrés impairs.*

On peut détailler un peu plus et donner les trois propriétés suivantes (concernant des graphes simples) :

a) Si G est un graphe eulérien, alors il est connexe et tous ses sommets sont de degrés pairs.

b) Si tous les sommets d'un graphe connexe G sont de degrés pairs, alors ce graphe est eulérien.

c) Un graphe connexe G est semi-eulérien si et seulement si il admet 0 ou 2 sommets de degrés impairs.

Réponse 3 Voir [2] §. 2.1.2.

Réponse 4 On se reportera à la Section 2.2.4 de [2] consacrée aux graphes probabilistes. On peut y lire :

▶ Qu'une **matrice stochastique** est une matrice dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs et dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

▶ Que la matrice de transition d'un graphe probabiliste est une matrice stochastique.

▶ Que l'étude d'un système :

a) qui ne peut prendre qu'un nombre fini d'états,

b) qui évolue par étapes successives d'un état à un autre,

c) tel que la probabilité pour qu'à une étape donnée le système se trouve dans un état dépende uniquement de l'étape précédente,

se fait à l'aide d'un graphe probabiliste qui possède une matrice de transition. A la n-ième étape, on définit alors une variable aléatoire discrète X_n dont les valeurs correspondent aux différents états possibles du système, et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **chaîne de Markov**.

Réponse 3 Que $\Delta_g \leq \Delta_G$. En effet, si $\Delta_G < \Delta_g$, la coloration du graphe G colore naturellement le sous-graphe g avec Δ_G couleurs, ce qui est impossible si $\Delta_G < \Delta_g$.

Bibliographie

[1] F. Herbaut, Souvenirs des oraux du CAPES 2006, (en ligne en 2008 à l'adresse : http ://fabien.herbaut.free.fr/oraux2006.html), 2006.

[2] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, 14 leçons rédigées et commentées, Vol. I, Publibook, 2007.