IUFM Antilles-Guyane

PLC 1 - Mathématiques

Algèbre-Géométrie

Problème :

Étant donné un ensemble E et une application f de E dans lui-même, on dira que n éléments ordonnés de E, notés $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ forment un cycle pour f si $a_2, \ldots, a_n$ sont distincts de a_1 et si :

$$f(a_1) = a_2 \qquad f(a_2) = a_3 \qquad \ldots \qquad f(a_{n-1}) = a_n \qquad f(a_n) = a_1 .$$

L'image de a_1 par f^h sera notée a_{h+1} pour tout entier positif h (ainsi $a_{h+n} = a_h$). Lorsque E est un espace vectoriel, un endomorphisme f de E sera dit cyclique d'ordre n s'il existe au moins un sous-ensemble de n vecteurs engendrant E et un ordre de rangement tel que ces vecteurs forment un cycle pour f.

De même, une transformation affine g d'un espace affine $\mathcal{E}$ sera dite cyclique d'ordre n s'il existe au moins un sous-ensemble de n points engendrant $\mathcal{E}$ et un ordre de rangement tel que ces points forment un cycle pour g.

Enfin, les espaces vectoriels qui interviennent sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Première Partie :

E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme de E cyclique d'ordre n.

1°/ Montrer que dans un cycle pour f :

a) 2 vecteurs quelconques sont distincts

b) 2 vecteurs consécutifs forment une base de E

2°/ Etablir les relations :

$$f^n = Id$$

$$f^m \neq Id \quad \text{quel que soit } m \text{ tel que } 0 < m < n.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un cycle pour f à partir d'un vecteur x non nul donné est que x ne soit pas un vecteur propre de f.

3°/ Montrer qu'il existe des bases de E dans lesquelles f sera représenté par une matrice du type $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$

Etablir que :
* a vaut 1 ou -1.
* a et b sont indépendants du choix d'une telle base,
* $f^2 = a\,Id + b f$.

4°/ $\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$ est un idéal principal $I(f)$ de $\mathbb{R}[X]$.
Quel est son générateur ? En déduire que le polynôme $P(X) = X^2 - bX - a$ ne peut pas avoir de racine double.

5°/ Montrer que $P(X)$ a ses racines réelles ssi $f^2 = Id$

6°/ On suppose que $P(X)$ a ses racines non réelles.
Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ un cycle pour f. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Φ unique telle que :

$$\Phi(a_1, a_1) = 1$$

$$\Phi(f(x), f(y)) = \Phi(x, y) \quad \forall\, x, y \in E$$

Montrer que Φ définit une structure euclidienne sur E.

7°/ Posons $\Phi(a_1, a_2) = \cos\theta$. Vérifier que cette définition est justifiée. Montrer que :

$$\begin{cases} \Phi(a_k, a_1) = \cos(k-1)\theta & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \Phi(a_k, a_\ell) = \cos(k-\ell)\theta & \forall k, \ell \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En déduire en fonction de θ la décomposition de a_k sur la base (a_1, a_2) en utilisant $\Phi(a_k, a_1)$ et $\Phi(a_k, a_2)$.

En déduire l'expression de f^k comme combinaison linéaire de f et de l'identité pour tout entier relatif k (on commencera par traiter le cas où k est positif).

En déduire que : $\begin{cases} n\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \\ k\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi] \quad \text{si } 0 < k < n \end{cases}$

dès que f est cyclique d'ordre n.

Deuxième Partie :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2, d'espace vectoriel associé E.
Soit g une transformation affine de $\mathcal{E}$ cyclique d'ordre n.

1°/ Montrer que l'endomorphisme f de E associé à g est cyclique d'ordre $n \geq 3$.

2°/ a) Si f est un endomorphisme cyclique d'ordre $n \geq 3$, prouver que $f - I$ est inversible.

b) Si g est une application affine de partie linéaire f, montrer que si $f - Id$ est inversible, alors g admet un et un seul point fixe.

c) En déduire que toute transformation affine g de $\mathcal{E}$ associée à un endomorphisme f cyclique d'ordre $n \geq 3$ de E est cyclique.

3°/ On se donne n et trois points A_1, A_2, A_3. Montrer que si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, il existe une transformation affine cyclique d'ordre n pour laquelle A_1, A_2, A_3 sont 3 points consécutifs d'un cycle.

4°/ Quelle relation doit-il y avoir entre les 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 pour qu'il existe une transformation affine cyclique d'ordre $n \geq 4$ pour laquelle A_1, A_2, A_3, A_4 soient 4 points consécutifs d'un cycle.

Troisième Partie :

E est maintenant un espace vectoriel réel de dimension 3 et f un endomorphisme de E, cyclique d'ordre n.

1°/ Montrer que a) $f^n = Id$

b) 3 vecteurs consécutifs d'un cycle sont linéairement indépendants et que Id, f, f^2 sont linéairement indépendants.

2°/ Montrer que dans une base convenable f est représenté par une matrice M du type :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Montrer que a, b, c sont indépendants du choix d'une telle base.
Montrer que $f^3 - cf^2 - bf - a = 0$

3°/ En considérant l'idéal annulateur $I(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(f) = 0\}$ de f, montrer que $P(X) = X^3 - cX^2 - bX - a$ divise $X^n - 1$. En déduire que f admet une valeur propre réelle unique et non multiple.

4°/ Lorsque f est direct (ie de déterminant positif), quelle est cette valeur propre réelle ? Calculer a, b, c en fonction de l'argument θ d'une des valeurs propres non réelles de f.

Lorsque f est indirect (ie de déterminant négatif), quelle est la valeur propre réelle ? Y-a-t'il une condition sur n ? Calculer de même a, b et c.

5°/ Soit $a_1, \dots, a_n$ un cycle de f. Démontrer que si f est direct, les différences $a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}, a_1 - a_n$ sont contenues dans le seul sous-espace vectoriel F de E de dimension 2 stable par f et qu'elles forment un cycle pour la restriction de f à ce sous-espace F.

6°/ Montrer qu'on peut munir E d'un produit scalaire rendant f orthogonal lorsque f est direct.

7°/ Soit g une transformation affine cyclique d'un espace affine $\mathcal{E}$ associé à l'espace vectoriel E et soit f l'endomorphisme de E associé à g.

Montrer que :

a) f est cyclique de même ordre que g,

b) g admet un point fixe unique et f est indirect.