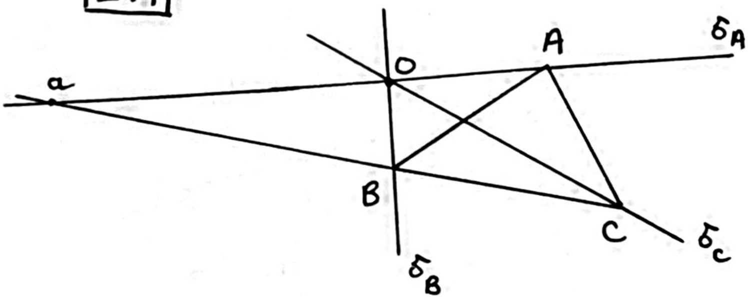
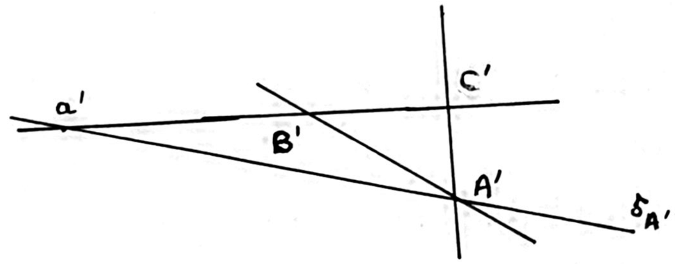
I.1





$a'A'B'$ et aCO ont leurs côtés parallèles 2 à 2, donc sont homothétiques d'après le Th. de Desargues $\boxed{T}$. Par suite : $\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{aO}} = \dfrac{\overline{a'A'}}{\overline{aC}}$

De même, $a'A'C'$ et aBO sont homothétiques (ie se déduisent l'un de l'autre par une homothétie ou une translation) et : $\dfrac{\overline{a'C'}}{\overline{aO}} = \dfrac{\overline{a'A'}}{\overline{aB}}$

d'où l'on déduit $\overline{a'B'}\cdot\overline{aC} = \overline{a'C'}\cdot\overline{aB} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \dfrac{\overline{aB}}{\overline{aC}}}$

I.2

* $\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \dfrac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = k \Rightarrow \overrightarrow{aB} = k\,\overrightarrow{aC}$ et $\overrightarrow{a'B'} = k\,\overrightarrow{a'C'}$

Si f est affine et transforme A,B,C en A',B',C', f conserve les barycentres, donc $\overrightarrow{aB} = k\,\overrightarrow{aC}$ entraîne $\overrightarrow{f(a)B'} = k\,\overrightarrow{f(a)C'}$ ie $\boxed{f(a) = a'}$ = barycentre de $A'(0), B'(1), C'(-k)$

* Comme $f(A) = A'$ et $f(a) = a'$, l'image de $\delta_A = (Aa)$ par f sera $\delta_{A'} = (A'a')$,

soit : $\boxed{f(\delta_A) = \delta_{A'}}$

I.3

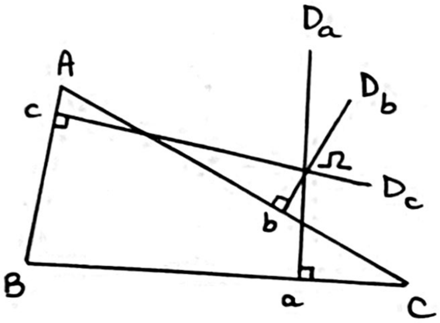
Si $(BC)//(B'C')$, $BC // \delta_A \Rightarrow f((BC)) = (B'C') \;//\; f(\delta_A)$

$A \in \delta_A$ donc $A' = f(A) \in f(\delta_A)$. $f(\delta_A)$ passe par A' en étant parallèle à $(B'C')$, c'est donc $\delta_{A'}$.

I.4

$O \in \delta_A \cap \delta_B \cap \delta_C \Rightarrow f(O) \in f(\delta_A) \cap f(\delta_B) \cap f(\delta_C) = \delta_{A'} \cap \delta_{B'} \cap \delta_{C'}$ d'après I.2. et I.3. Comme $\delta_{A'} \neq \delta_{B'}$ (sinon $(BC)//(AC)$) on en déduit que $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ sont concourantes en un point $O' = f(O)$.

$\boxed{\text{II}.1}$



* Si D_a, D_b, D_c sont concourante, le th. de Pythagore donne :

$$\begin{cases} A\Omega^2 = Ac^2 + c\Omega^2 = Ab^2 + b\Omega^2 \\ B\Omega^2 = Ba^2 + a\Omega^2 = Bc^2 + c\Omega^2 \\ C\Omega^2 = Cb^2 + b\Omega^2 = Ca^2 + a\Omega^2 \end{cases}$$

$$Ba^2 + Ac^2 + Cb^2 = Bc^2 + Ab^2 + Ca^2$$

$$aB^2 - aC^2 + bC^2 - bA^2 + cA^2 - cB^2 = 0 \qquad (1)$$

* Réciproquement, si (1) a lieu, soit Ω l'intersection de D_a et D_b et c' le pied de la perpendiculaire $D_{c'}$ à AB passant par Ω. D_a, D_b et $D_{c'}$ sont concourantes en Ω donc :

$$aB^2 - aC^2 + bC^2 - bA^2 + c'A^2 - c'B^2 = 0$$

En retranchant de la même égalité obtenue avec a, b et c :

$$c'A^2 - c'B^2 = cA^2 - cB^2$$

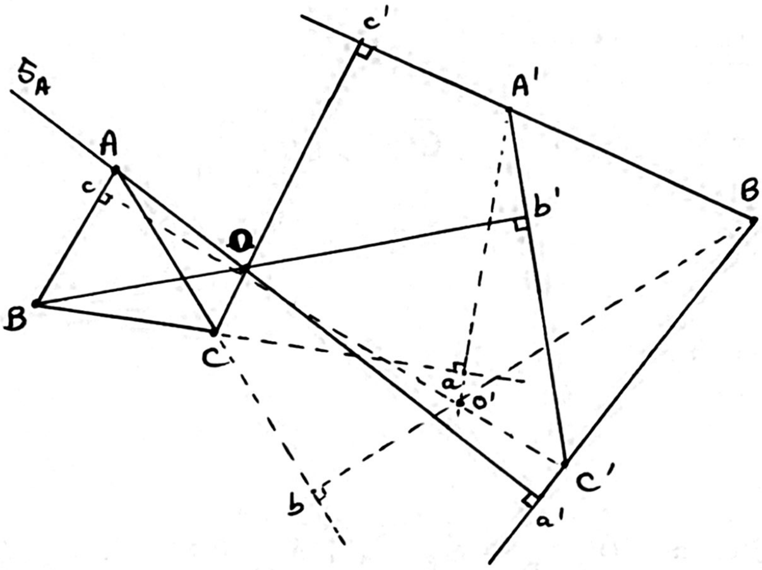
$$c'A^2 - (\overrightarrow{c'A} + \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{cA}^2 - (\overrightarrow{cA} + \overrightarrow{AB})^2$$

$$-2\,\overrightarrow{c'A}.\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{cA}.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{c'c} = 0 \Rightarrow c = c' \quad (\text{car } \overrightarrow{cc'} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}).$$

CQFD

$\boxed{\text{II}.2}$



On a : $a'B'^2 - a'C'^2 = (\overrightarrow{a'A} + \overrightarrow{AB'})^2 - (\overrightarrow{a'A} + \overrightarrow{AC'})^2 = 2\,\overrightarrow{a'A}.\underbrace{(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'})}_{\overrightarrow{C'B'}} + AB'^2 - AC'^2$

$= AB'^2 - AC'^2$ car $(a'A) \perp (C'B')$.

et les 2 autres égalités obtenues par permutation circulaire des symboles A, B, C et a, b, c.

On aura de même les égalités $aB^2 - aC^2 = A'B^2 - A'C^2$ ... obtenues en changeant les lettres primées en non primées et réc. Alors :

$\delta_A, \delta_B, \delta_C$ concourantes $\underset{\text{II}.1}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{a'B'^2 - a'C'^2}_{AB'^2 - AC'^2} + \underbrace{b'C'^2 - b'A'^2}_{BC'^2 - BA'^2} + \underbrace{c'A'^2 - c'B'^2}_{CA'^2 - CB'^2} = 0$

$\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'}$ concourantes $\underset{\text{II}.1}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{aB^2 - aC^2}_{A'B^2 - A'C^2} + \underbrace{bC^2 - bA^2}_{B'C^2 - B'A^2} + \underbrace{cA^2 - cB^2}_{C'A^2 - C'B^2} = 0$

On peut conclure :

$$\boxed{\delta_A, \delta_B, \delta_C \text{ concourantes} \Longleftrightarrow \delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'} \text{ concourantes}}$$

$\boxed{\text{III}.1.\alpha}$ (Voir la figure en p)

* **aOB et a'C'A' semblables ?**

$$\begin{cases} \widehat{aB,aO} = \widehat{BC,\delta_A} = \underbrace{\widehat{BC,\delta_{A'}}}_{-\theta} + \widehat{\delta_{A'},B'C'} + \underbrace{\widehat{B'C',\delta_A}}_{\theta} = \widehat{\delta_{A'},B'C'} \\ \widehat{a'A',a'C'} = \widehat{\delta_{A'},B'C'} \end{cases}$$

donc $\boxed{\widehat{aB,aO} = \widehat{a'A',a'C'}}$

$$\begin{cases} \widehat{OB,Oa} = \widehat{\delta_B,\delta_A} \\ \widehat{C'A',C'a'} = \widehat{C'A',B'C'} = \underbrace{\widehat{C'A',\delta_B}}_{\theta} + \widehat{\delta_B,\delta_A} + \underbrace{\widehat{\delta_A,\delta B'C'}}_{-\theta} = \widehat{\delta_B,\delta_A} \end{cases}$$

donc $\boxed{\widehat{OB,Oa} = \widehat{C'A',C'a'}}$

Les triangles aOB et a'C'A' sont directement semblables car possèdent 2 angles respectifs égaux.

* On montre de même que aOC et a'B'A' sont directement semblables

$\boxed{\text{III}.1.\beta}$ $\vec{r}\,\vec{s}^{-1}(\overrightarrow{a'B'}) = \vec{r}(\overrightarrow{aO}) = \overrightarrow{a'C'}$

$\vec{s}^{-1}\vec{r}\,(\overrightarrow{aB}) = \vec{s}^{-1}(\overrightarrow{a'A'}) = \overrightarrow{aC}$

Les similitudes vectorielles directes planes forment un groupe commutatif, donc $\vec{r}\,\vec{s}^{-1} = \vec{s}^{-1}\vec{r}$ est une similitude directe. L'image de $\overrightarrow{a'B'}$ par cette similitude est $\overrightarrow{a'C'}$ colinéaire à $\overrightarrow{a'B'}$: <u>$\vec{r}\,\vec{s}^{-1} = \vec{s}^{-1}\vec{r}$ est donc une homothétie h.</u>

Donc : $\exists k \in \mathbb{R}$ $\quad \overrightarrow{a'C'} = k\,\overrightarrow{a'B'}$ et $\overrightarrow{aC} = k\,\overrightarrow{aB}$

$\overrightarrow{aB} \neq \vec{0}$ sinon $a = B \Rightarrow \delta_A = (AB)$ et comme $\delta_B \cap (AB) = \{B\}$, O sera égal à B, absurde. Donc :

$$\boxed{\frac{\overline{a'C'}}{\overline{a'B'}} = \frac{\overline{aC}}{\overline{aB}}}$$

III.1.γ Comme au I.2 :

f affine conserve les barycentres et $\frac{\overline{a'C'}}{\overline{a'B'}} = \frac{\overline{aC}}{\overline{aB}}$, donc $f(a) = a'$

$f(A) = A'$ et $f(a) = a'$ donc $f(\delta_A) = f((Aa)) = (A'a') = \delta_{A'}$

III.2 Si $(B'C', BC) = \theta$, $(BC) // \delta_A \Rightarrow f((BC)) = (B'C') // f(\delta_A)$

De plus $A \in \delta_A \Rightarrow A' = f(A) \in f(\delta_A)$.

$f(\delta_A)$ et $\delta_{A'}$ passent par A' et sont parallèles à $(B'C')$ donc $f(\delta_A) = \delta_{A'}$.

III.3 Si $O \in \{A, B, C\}$, par ex. $O = A$, alors $\delta_B = (AB)$, $\delta_C = (AC)$ donc

$\widehat{C'A', AB} = \widehat{A'B', AC} = \theta$.

Compte tenu de $\widehat{\delta_{C'}, AB} = \widehat{\delta_{B'}, AC} = \theta$ on obtient $\delta_{C'} = (C'A')$ et $\delta_{B'} = (A'B')$

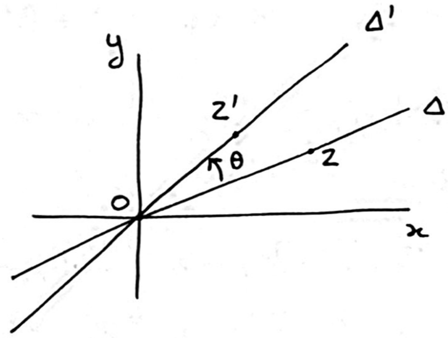
donc $\delta_{A'} \cap \delta_{B'} \cap \delta_{C'} = \{A'\}$

III.4 <u>On a montré que $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ concourent en O ssi $\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'}$ concourent en $O' = f(O)$.</u>

* Si $\theta = 0$, on retrouve le résultat de la partie I, mais celle-ci n'a utilisé que des notions affines, alors que la partie III utilise des notions métriques.

* Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient le résultat du II avec le renseignement supplémentaire $O' = f(O)$.

IV.1



$$\widehat{\Delta, \Delta'} = \theta \quad [\pi] \iff \widehat{Ox, \Delta'} - \widehat{Ox, \Delta} = \theta \quad [\pi]$$

$$\arg Z' - \arg Z = \theta \quad [\pi]$$

$$\arg Z'\bar{Z} = \theta \quad [\pi]$$

$$Z'\bar{Z} = |Z'\bar{Z}| \, e^{i(\theta + k\pi)}$$

$$Z'\bar{Z} = \pm |Z'\bar{Z}| \, e^{i\theta}$$

$$(Z'\bar{Z})^2 = |Z'\bar{Z}|^2 e^{i2\theta} \iff Z'\bar{Z} = \bar{Z}'Z \, e^{i2\theta}$$

On a bien $\boxed{\widehat{\Delta, \Delta'} = \theta \quad [\pi] \iff Z'\bar{Z} - e^{i2\theta} Z\bar{Z}' = 0}$

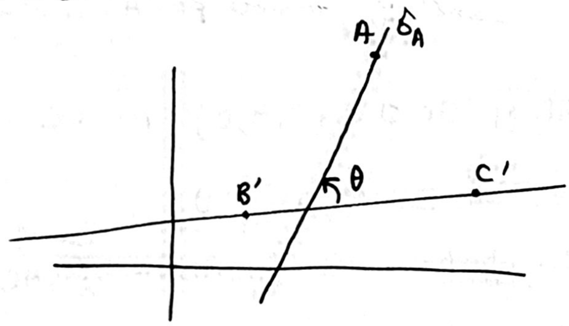
2-solution :

$\widehat{\Delta,\Delta'} = \theta \quad [\pi]$ ssi on passe de Z à Z' par une similitude directe de centre O et d'angle θ ou $\theta+\pi$, ie s'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $Z' = k e^{i\theta} Z$.

Alors $\overline{Z}' = k e^{-i\theta} \overline{Z}$ et en éliminant k, on obtient $Z'\overline{Z} = e^{i2\theta} Z\overline{Z}'$.

Réciproquement, si $Z'\overline{Z} = e^{i2\theta} Z\overline{Z}'$, alors $Z'Z^{-1}e^{-i\theta} = \overline{Z}'\,\overline{Z}^{-1}e^{i\theta}$ montre que $Z'Z^{-1}e^{-i\theta}$ est réel, et donc que $Z' = k Z e^{i\theta}$

IV.2



$M(Z) \in \delta_A \Leftrightarrow \widehat{B'C', AM} = \theta \quad [\pi]$

L'équation de δ_A s'obtient en faisant

$$\begin{cases} Z = \gamma' - \beta' \\ Z' = z - \alpha \end{cases} \quad \text{dans IV.1}.$$

On obtient : $(z-\alpha)(\overline{\gamma}'-\overline{\beta}') - e^{i2\theta}(\overline{z}-\overline{\alpha})(\gamma'-\beta') = 0$

d'où $\quad z(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}') - e^{i2\theta}\,\overline{z}\,(\beta'-\gamma') = \alpha(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}') - e^{i2\theta}\,\overline{\alpha}\,(\beta'-\gamma')$

IV.3 $A'(\alpha')$, $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$ non alignés ssi $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}$ non colinéaires, ie ($\theta=0$ en IV.1) :

$$(\beta'-\alpha')(\overline{\gamma'-\beta'}) \neq (\overline{\beta'-\alpha'})(\gamma'-\beta')$$

soit : $\quad \alpha'(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}') + \beta'(\overline{\gamma}'-\overline{\alpha}') + \gamma'(\overline{\alpha}'-\overline{\beta}') \neq 0$

IV.4 δ_A, δ_B et δ_C seront concourantes ssi le système suivant admet une solution Z unique :

$$\begin{cases} z(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}') - e^{i2\theta}\,\overline{z}\,(\beta'-\gamma') = \alpha(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}') - e^{i2\theta}\,\overline{\alpha}\,(\beta'-\gamma') & :\delta_A \\ z(\overline{\gamma}'-\overline{\alpha}') - e^{i2\theta}\,\overline{z}\,(\gamma'-\alpha') = \beta(\overline{\gamma}'-\overline{\alpha}') - e^{i2\theta}\,\overline{\beta}\,(\gamma'-\alpha') & :\delta_B \\ z(\overline{\alpha}'-\overline{\beta}') - e^{i2\theta}\,\overline{z}\,(\alpha'-\beta') = \gamma(\overline{\alpha}'-\overline{\beta}') - e^{i2\theta}\,\overline{\gamma}\,(\alpha'-\beta') & :\delta_C \end{cases}$$

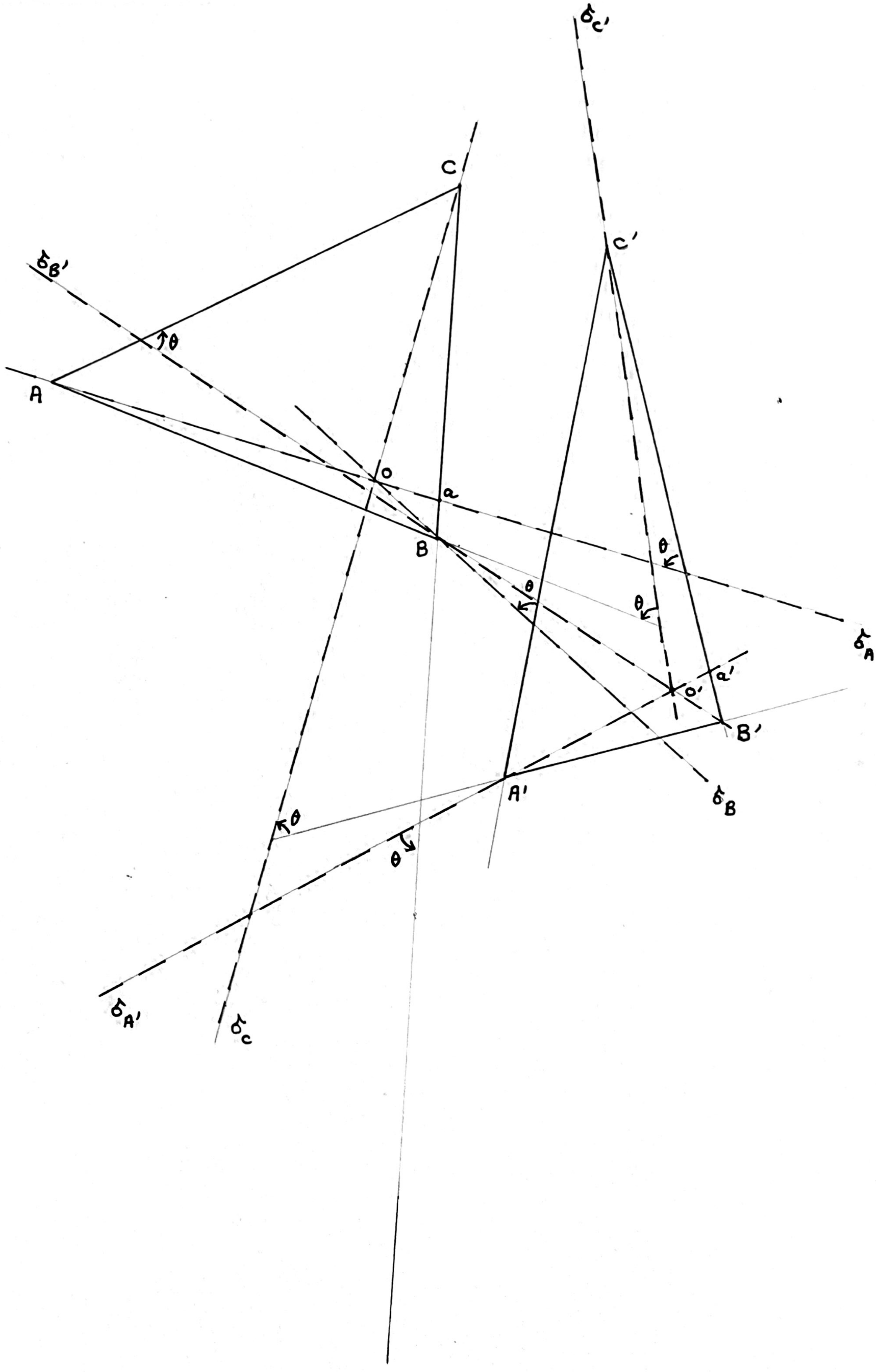
Le déterminant des 2 premières équations est $e^{i2\theta}\left[(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}')(\alpha'-\gamma') + (\overline{\gamma}'-\overline{\alpha}')(\beta'-\gamma')\right]$, donc non nul (IV.3) car A', B', C' ne sont pas alignés. Ces 2 premières équations admettent donc un couple solution unique (X,Y). On vérifie que $Y = \overline{X}$.

Si Z est solution des 2 premières équations, il sera solution des 3 équations ssi (condition de compatibilité) :

$$0 = \alpha(\overline{\beta}'-\overline{\gamma}') + \beta(\overline{\gamma}'-\overline{\alpha}') + \gamma(\overline{\alpha}'-\overline{\beta}') - e^{i2\theta}\left[\overline{\alpha}(\beta'-\gamma') + \overline{\beta}(\gamma'-\alpha') + \overline{\gamma}(\alpha'-\beta')\right]$$

(on a additionné les 3 équations) C'est la condition cherchée.

Figure du III pour $\theta = 60°$



$\boxed{\text{IV.5}}$

$$\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma') = e^{i2\theta}\Big[e^{-i2\theta}\left[\alpha(\bar\beta'-\bar\gamma')+\beta(\bar\gamma'-\bar\alpha')+\gamma(\bar\alpha'-\bar\beta')\right]-\bar\alpha(\beta'-\gamma')-\bar\beta(\gamma'-\alpha') - \bar\gamma(\alpha'-\beta')\Big]$$

$$= e^{i2\theta}\,\varphi_{-\theta}(\alpha',\beta',\gamma';\alpha,\beta,\gamma)$$

$\boxed{\text{IV.6}}$ Compte tenu des questions précédentes :

$$\delta_A,\delta_B,\delta_C \text{ concourantes} \overset{\text{IV.4}}{\Longleftrightarrow} \varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma')=0$$

$$\underset{\text{IV.5}}{\Longleftrightarrow} \varphi_{-\theta}(\alpha',\beta',\gamma';\alpha,\beta,\gamma)=0 \underset{\text{IV.4}}{\Longleftrightarrow} \delta_{A'},\delta_{B'},\delta_{C'} \text{ concourantes}$$

$\boxed{\text{IV.7}}$ $f(z)=uz+v\bar z+w$ vérifie $f(\alpha)=\alpha'$, $f(\beta)=\beta'$ et $f(\gamma)=\gamma'$ ssi :

$$\begin{cases} u\alpha+v\bar\alpha+w=\alpha' \\ u\beta+v\bar\beta+w=\beta' \\ u\gamma+v\bar\gamma+w=\gamma'\end{cases} \qquad \text{d'où } \beta'-\gamma'=u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)$$

et les 2 autres relations obtenues par permutation circulaire de α,β,γ.

Par suite,

$$\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma') = \alpha\left[\bar u(\bar\beta-\bar\gamma)+\bar v(\beta-\gamma)\right]+\beta\left[\bar u(\bar\gamma-\bar\alpha)+\bar v(\gamma-\alpha)\right]+\gamma\left[\bar u(\bar\alpha-\bar\beta)+\bar v(\alpha-\beta)\right]$$
$$-e^{i2\theta}\left[\bar\alpha\left[u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)\right]+\bar\beta\left[u(\gamma-\alpha)+v(\bar\gamma-\bar\alpha)\right]+\bar\gamma\left[u(\alpha-\beta)+v(\bar\alpha-\bar\beta)\right]\right]$$

$$\boxed{\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma') = (\bar u+e^{i2\theta}u)\left(\alpha(\bar\beta-\bar\gamma)+\beta(\bar\gamma-\bar\alpha)+\gamma(\bar\alpha-\bar\beta)\right)}$$

$\boxed{\text{IV.8}}$ La CNS pour que $\delta_A,\delta_B,\delta_C$ soient concourantes est (IV.4) :

$$(\bar u+e^{i2\theta}u)\left(\alpha(\bar\beta-\bar\gamma)+\beta(\bar\gamma-\bar\alpha)+\gamma(\bar\alpha-\bar\beta)\right)=0$$

IV.3 a montré que A, B, C étant non alignés, le 2^e facteur du produit ci-dessus est non nul. La CNS cherchée est donc : $\boxed{\bar u+e^{i2\theta}u=0}$

$\boxed{IV.9}$ De l'équation de δ_A : $z(\bar\beta'-\bar\gamma')-e^{i2\theta}\bar z(\beta'-\gamma')=\alpha(\bar\beta'-\bar\gamma')-e^{i2\theta}\bar\alpha(\beta'-\gamma')$

on tire : $$\boxed{(z-\alpha)(\bar\beta'-\bar\gamma')=e^{i2\theta}(\bar z-\bar\alpha)(\beta'-\gamma')}$$

d'où $$\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=e^{i2\theta}\frac{\beta'-\gamma'}{\bar\beta'-\bar\gamma'} \qquad (*)$$

Comme $\beta'-\gamma'=u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)$ (IV.7), on obtient :

$$\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=e^{i2\theta}\frac{u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)}{\bar u(\bar\beta-\bar\gamma)+\bar v(\beta-\gamma)}=e^{i2\theta}\cdot\frac{u\dfrac{\beta-\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}+v}{\bar u+\bar v\dfrac{\beta-\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}}$$

De l'équation de $\delta_{A'}$ on tire (comme ci-dessus, avec $-\theta$ au lieu de θ) :

$$\frac{z'-\alpha'}{\bar z'-\bar\alpha'}=e^{-i2\theta}\frac{\beta-\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}$$

d'où : $$\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=e^{i2\theta}\frac{ue^{i2\theta}\dfrac{z'-\alpha'}{\bar z'-\bar\alpha'}+v}{\bar u+\bar v e^{i2\theta}\dfrac{z'-\alpha'}{\bar z'-\bar\alpha'}}=\frac{ue^{i2\theta}(z'-\alpha')+v(\bar z'-\bar\alpha')}{\bar u e^{-i2\theta}(\bar z'-\bar\alpha')+\bar v(z'-\alpha')}$$

ie, comme $e^{i2\theta}=-\dfrac{\bar u}{u}$,

$$\boxed{\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=\frac{-\bar u(z'-\alpha')+v(\bar z'-\bar\alpha')}{\bar v(z'-\alpha')-u(\bar z'-\bar\alpha')}}$$

NB : 1) On a supposé que $z\neq\alpha$ (et $z'\neq\alpha'$) quitte à refaire le travail avec $\dfrac{z-\beta}{\bar z-\bar\beta}$ ...

2) $$z=\beta \iff \begin{cases}\dfrac{(\beta-\alpha)(\bar\beta'-\bar\gamma')}{(\bar\beta-\bar\alpha)(\beta'-\gamma')}=e^{i2\theta}\\[2ex] \dfrac{(\beta-\gamma)(\bar\alpha'-\bar\beta')}{(\bar\beta-\bar\gamma)(\alpha'-\beta')}=e^{i2\theta}\end{cases} \iff z'=\beta'$$ (utiliser les équations (*) de $\delta_A, \delta_C, \delta_{A'}, \delta_{C'}$)

On retrouve le résultat du III.3.

$\boxed{\text{II } 10}$

(5) s'écrit $X = \dfrac{-\bar{u}X' + v}{\bar{v}X' - u}$ où $\begin{cases} X = \dfrac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \\ X' = \dfrac{z'-a'}{\bar{z}'-\bar{a}'} \end{cases}$

On désire exprimer X' en fonction de X. On a :

$$X'(\bar{v}X + \bar{u}) = uX + v$$

• Si $\bar{v}X + \bar{u} = 0$, alors $uX + v = 0$ donc $X = -\frac{v}{u}$, et $\bar{v}X + \bar{u} = -|v|^2 + |u|^2 = 0$.
Montrons que c'est impossible, ie que $\underline{|u|^2 - |v|^2 \neq 0}$:

$\vec{f}(z) = uz + v\bar{z}$ où $\begin{cases} u = a + ib \\ v = c + id \end{cases}$

d'où $\vec{f}(z) = (a+ib)(x+iy) + (c+id)(x-iy) = (a+c)x + (d-b)y + i[(b+d)x + (a-c)y]$

La matrice de la partie linéaire $\vec{f}$ de f est donc :

$$M = \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ b+d & a-c \end{pmatrix}$$

et $\vec{f}$ étant bijective, $\det M = a^2 - c^2 - d^2 + b^2 = |u|^2 - |v|^2 \neq 0$.

• Ainsi $\bar{v}X + \bar{u} \neq 0$ et $X' = \dfrac{uX + v}{\bar{v}X + \bar{u}}$, que l'on écrit :

$$\frac{z'-a'}{\bar{z}'-\bar{a}'} = \frac{u\dfrac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} + v}{\bar{v}\dfrac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} + \bar{u}}$$

$$\frac{z'-a'}{u(z-a) + v(\bar{z}-\bar{a})} = \frac{\bar{z}'-\bar{a}'}{\bar{u}(\bar{z}-\bar{a}) + \bar{v}(z-a)}$$

$\dfrac{z'-a'}{u(z-a) + v(\bar{z}-\bar{a})}$ <u>étant égal à son conjugué, il est réel</u>

$\boxed{\text{IV.11}}$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\dfrac{z'-\alpha'}{u(z-\alpha)+v(\bar{z}-\bar{\alpha})} = \lambda$

$$z' = \lambda(uz + v\bar{z} - u\alpha - v\bar{\alpha}) + \alpha'$$

$$z' = \lambda(uz + v\bar{z} + w - \alpha') + \alpha' \qquad \text{car } u\alpha + v\bar{\alpha} + w = \alpha'$$

$$z' = \lambda f(z) + (1-\lambda)\alpha'$$

O' apparaît donc comme le barycentre des points $f(O)$, A' affectés des coefficients λ et $1-\lambda$.

De même, O' sera le barycentre de $f(O)$, B' d'une part, et de $f(O)$, C' d'autre part. O' sera donc sur les droites $f(O)A'$, $f(O)B'$ et $f(O)C'$, finalement : $\boxed{O' = f(O)}$.