Problème

Première partie :

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine. Soient (A,B,C) et (A',B',C') deux triplets de points de $\mathcal{P}$ formés de points non alignés. On note δ_A, δ_B, δ_C, (respectivement $\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'}$), les parallèles issues de A à $B'C'$, de B à $A'C'$, de C à $A'B'$, (respectivement de A' à BC, de B' à AC, de C' à AB).

On suppose que δ_A, δ_B, δ_C se coupent en un point O.

1. On suppose que BC et $B'C'$ ne sont pas parallèles, et on pose :

$$a = \delta_A \cap BC, \quad a' = \delta_{A'} \cap B'C'.$$

Montrer que les triangles $a'A'B'$ et aCO d'une part, $a'A'C'$ et aBO d'autre part, sont homothétiques.

En déduire que :

$$\frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}$$

2. Soit f l'unique application affine telle que :

$$A' = f(A), \quad B' = f(B), \quad C' = f(C).$$

Montrer que si BC et $B'C'$ ne sont pas parallèles, alors

$$a' = f(a), \text{ et } \delta_{A'} = f(\delta_A).$$

3. Montrer que $\delta_{A'} = f(\delta_A)$ même si BC et $B'C'$ sont parallèles.

4. Déduire des questions précédentes que les droites $\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'}$ se coupent un un point O'. Que peut-on dire de O' et $f(O)$?

Deuxième partie :

$\mathcal{P}$ désigne maintenant le plan affine euclidien.

1. Soit (A,B,C) un triangle de $\mathcal{P}$ et a, (resp b, resp c) un point de BC, (resp AC, resp AB). Soit D_a, (resp D_b ; resp D_c), la perpendiculaire issue de a à BC, (resp de b à CA, resp de c à AB).

Prouver que si D_a, D_b, D_c concourent en un point Ω, alors :

$$(1) \quad aB^2 - aC^2 + bC^2 - bA^2 + cA^2 - cB^2 = 0.$$

Prouver la réciproque du résultat précédent. (On pourra utiliser le résultat direct).

2. Soient maintenant (A,B,C), (A',B',C') deux triangles (non aplatis) de $\mathcal{P}$. On note δ_A la perpendiculaire issue de A à $B'C'$, δ_B celle isue de B à $A'C'$, δ_C celle isue de C à $A'B'$.

On définit de même $\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'}$ comme étant les perpendiculaires issues de A' à BC, de B' à CA, de C' à AB.

Soients : $$\begin{cases} a = \delta_{A'} \cap BC, \quad b = \delta_{B'} \cap CA, \quad c = \delta_{C'} \cap AB \\ a' = \delta_A \cap B'C', \quad b' = \delta_B \cap C'A', \quad c' = \delta_C \cap A'B' \end{cases}$$

En utilisant, (en justifiant), des relations du type :

$$a'B'^2 - a'C'^2 = AB'^2 - AC'^2$$

ainsi que les résultats antérieurs de cette partie, prouver que δ_A, δ_B, δ_C sont concourantes si et seulement si $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ le sont.

Troisième partie :

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien orienté, (A,B,C), (A',B',C') 2 triangles non aplatis.

Soit θ un réel, δ_A, δ_B, δ_C, $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ les droites passant par A, B, C, A', B', C' respectivement, telles que :

$$\begin{cases} (B'C', \delta_A) = (C'A', \delta_B) = (A'B', \delta_C) = \theta \text{ (angles orientés de droites)} \\ (BC, \delta_{A'}) = (CA, \delta_{B'}) = (AB, \delta_{C'}) = -\theta \text{ (angles orientés de droites).} \end{cases}$$

On suppose que δ_A, δ_B, δ_C se coupent en O, distinct de A, B, C.

1. Si $(B'C', BC) \neq \theta$, on pose : $a = \delta_A \cap BC$, $a' = \delta_{A'} \cap B'C'$.

α) Prouver qu'il existe deux similitudes directes r et s de $\mathcal{P}$ telles que :

$r(a) = a'$, $r(O) = C'$, $r(B) = A'$

$s(a) = a'$, $s(O) = B'$, $s(C) = A'$

β) Soient $\vec{r}$ et $\vec{s}$ les parties linéaires de r et s.

Calculer $\vec{r} \circ (\vec{s}^{\,-1})(\overrightarrow{a'B'})$ et $(\vec{s}^{\,-1}) \circ \vec{r}(\overrightarrow{aB})$

En déduire que $\vec{r} \circ (\vec{s}^{\,-1}) = (\vec{s}^{\,-1}) \circ \vec{r}$ est une homothétie, puis que :

$$\frac{\overline{a'C'}}{\overline{a'B'}} = \frac{\overline{aC}}{\overline{aB}}$$

Soit f l'unique application affine de $\mathcal{P}$ telle que :

$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

γ) Prouver que $a' = f(a)$, et que $\delta_{A'} = f(\delta_A)$.

2. Prouver que si $(B'C', BC) = \theta$, on a encore $\delta_{A'} = f(\delta_A)$

3. Que se passe-t-il si $O \in \{A,B,C\}$?

4. Enoncer le théorème démontré dans cette partie. Retrouve-t-on les résultats des deux premières parties ?

Quatrième partie :

On identifie $\mathcal{P}$ et le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On se propose de retrouver les résultats précédents.

1. Soient Z et Z' deux complexes non nuls, $\Delta = \mathbb{R}Z$ (droite OZ), $\Delta' = \mathbb{R}Z'$.

Montrer que :

$$[(\Delta, \Delta') = \theta \quad (\pi)] \iff (Z'\overline{Z} - e^{2i\theta} Z\overline{Z'} = 0)$$

On conserve les notations de la troisième partie, et A est d'affixe α, B d'affixe β, C γ, A' α', B' β', C' γ'.

2. Montrer que l'équation de δ_A est :

$$Z(\overline{\beta'} - \overline{\gamma'}) - e^{2i\theta}\,\overline{Z}(\beta' - \gamma') = \alpha(\overline{\beta'} - \overline{\gamma'}) - e^{2i\theta}\,\overline{\alpha}(\beta' - \gamma')$$

3. Prouver que, puisque A'B'C' ne sont pas alignés, on a :

$$\alpha'(\overline{\beta'} - \overline{\gamma'}) + \beta'(\overline{\gamma'} - \overline{\alpha'}) + \gamma'(\overline{\alpha'} - \overline{\beta'}) \neq 0$$

4. Déduire de ce qui précède que δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes si et seulement si :

$$\varphi_\Theta(\alpha, \beta, \gamma \,;\, \alpha', \beta', \gamma') = \alpha(\overline{\beta'} - \overline{\gamma'}) + \beta(\overline{\gamma'} - \overline{\alpha'}) + \gamma(\overline{\alpha'} - \overline{\beta'})$$

$$- e^{2i\theta}[\,\overline{\alpha}(\beta'-\gamma') + \overline{\beta}(\gamma'-\alpha') + \overline{\gamma}(\alpha'-\beta')\,] = 0.$$

5. Montrer que :

$$\varphi_\Theta(\alpha, \beta, \gamma \,;\, \alpha', \beta', \gamma') = e^{2i\theta}\,\varphi_{-\Theta}(\alpha', \beta', \gamma' \,;\, \alpha, \beta, \gamma).$$

6. En déduire que δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes en O si et seulement si $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ le sont en O', que l'on ne cherchera pas à caractériser dans cette question.

On va prouver que O' = f(O), où f est l'unique application affine telle que : f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'.

7. f se traduit par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$f(Z) = uZ + v\overline{Z} + w$, $((u,v,w) \in \mathbb{C})$, avec $\alpha' = f(\alpha)$, $\beta' = f(\beta)$, $\gamma' = f(\gamma)$.

Calculer $\varphi_\Theta(\alpha, \beta, \gamma \,;\, \alpha', \beta', \gamma')$ en fonction de α, β, γ, u, v, w.

8. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur (u,v,w) pour que les droites δ_A, δ_B, δ_C construites à partir de (A,B,C), (f(A),f(B),f(C)) soient concourantes ?

9. On suppose que :

$$(2) \quad \overline{u} + e^{2i\theta}\,u = 0.$$

En utilisant les équations de δ_A, δ_B, δ_C, $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ (IV - 2), et (2), montrer que les affixes Z de O et Z' de O' sont liées par :

$$(3) \quad \frac{Z - \alpha}{\overline{Z} - \overline{\alpha}} = \frac{-\overline{u}(Z' - \alpha') + v(\overline{Z'} - \overline{\alpha'})}{\overline{v}(Z' - \alpha') - u(\overline{Z'} - \overline{\alpha'})}$$

10. En déduire que :

$$(4) \quad \frac{Z' - \alpha'}{u(Z - \alpha) + v(\overline{Z} - \overline{\alpha})}$$

est réel. On montrera, si besoin est, que $|u|^2 - |v|^2 \neq 0$.

11. Montrer que O' est à l'intersection de 3 droites, dont l'unique point commun est f(O) ; conclure. (On utilisera (4) et 2 relations analogues).