Solution :

$\boxed{\text{I.1}}$ $\mathcal{O}^+$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}$ car non vide ($Id \in \mathcal{O}^+$) et vérifiant :

$$\forall f, g \in \mathcal{O}^+ \quad \det(fg^{-1}) = \det f . (\det g)^{-1} = 1 \Rightarrow fg^{-1} \in \mathcal{O}^+$$

De plus : $\forall f \in \mathcal{O}^+ \ \forall g \in \mathcal{O} \quad \det gfg^{-1} = \det g . \det f . (\det g)^{-1} = \det f = 1 \Rightarrow gfg^{-1} \in \mathcal{O}^+$

montre que $\boxed{\mathcal{O}^+ \triangleleft \mathcal{O}}$

NB : Plus rapidement, $\mathcal{O}^+$ est le noyau du morphisme de groupes :

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}, \circ) &\longrightarrow (\{\pm 1\}, \times)\\ f &\longmapsto \det f\end{aligned}$$

$\boxed{\text{I.2}}$ * Si σ_H est un retournement, $\dim H = n-2$ et la matrice de σ_H dans la base orthonormale $e = (e_1, \dots, e_n)$ où (e_1, e_2) base de $H^\perp$ et $(e_3, \dots, e_n)$ base de H est :

$$\mathrm{Mat}(\sigma_H ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det \mathrm{Mat}(\sigma_H ; e) = 1 \Rightarrow \sigma_H \in \mathcal{O}^+$

* Si H est un hyperplan, le même raisonnement donne $\mathrm{Mat}(\sigma_H ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

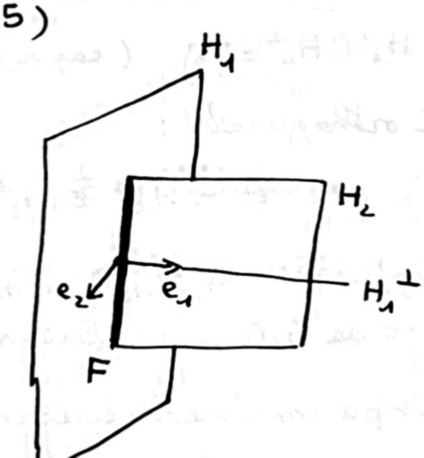
donc $\det \sigma_H = -1 \Rightarrow \sigma_H \in \mathcal{O}^- \doteq \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^+$.

σ_H est une symétrie hyperplane.

$\boxed{\text{I.3}}$ * $H_1^\perp \subset H_2 \Leftrightarrow H_1^{\perp\perp} \supset H_2^\perp \Leftrightarrow H_1 \supset H_2^\perp$

<u>On dit que H_1 et H_2 sont perpendiculaires</u> ssi $H_1^\perp \subset H_2$ (ie $H_2^\perp \subset H_1$).

NB : De même, on dira que les sev H_1 et H_2 sont orthogonaux ssi $H_1 \subset H_2^\perp$ (ou encore : $H_2 \subset H_1^\perp$). (Ramis II.2.1.3.5°/p 55)



* $H_1 \neq H_2$ (car $H_1^\perp \subset H_2$), donc

$F = H_1 \cap H_2$ sera de dimension $n-2$

$$(\dim H_1 \cap H_2 = \underbrace{\dim H_1}_{n-1} + \underbrace{\dim H_2}_{n-2} - \underbrace{\dim(H_1 + H_2)}_{n} = n-2)$$

$E = H_1^\perp \oplus H_1$

et $H_1 = H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$ car $H_2^\perp$ et $H_1 \cap H_2$ sont inclus dans H_1, d'intersection réduite à 0, et de dimensions respectives 1 et $n-2$.

Par suite :

(*) On peut court-circuiter ainsi ; $H_1^\perp + H_2^\perp = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ (car si $x \in H_1^\perp \cap H_2^\perp$, comme $H_1^\perp \subset H_2$, $x = 0$) puis $(H_1^\perp \oplus H_2^\perp)^\perp = H_1 \cap H_2 \Rightarrow E = H_1^\perp \oplus H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$

enchaîner page suiv.

$$E = H_1^\perp \oplus H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$$

On choisit une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ adaptée au problème ie :

(e_1) base orthonormale de $H_1^\perp$

(e_2) " " $H_2^\perp$

$(e_3, \dots, e_n)$ " " de $H_1 \cap H_2 \doteq F$

et il suffit d'expliciter les matrices de σ_{H_1} et σ_{H_2} dans $e = (e_1, \dots, e_n)$ pour conclure :

$$M_1 = \mathrm{Mat}(\sigma_{H_1} ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \mathrm{Mat}(\sigma_{H_2} ; e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $$M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\sigma_F ; e)$$

On aura bien : $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_F$ où σ_F est le retournement par rapport à $F = H_1 \cap H_2$.

NB : Le résultat subsiste même si H_1 et H_2 ne sont plus des hyperplans. (Ramis II 2.3.1.2°/ p 60). Montrons que "Si H_1 et H_2 sont 2 sev perpendiculaires de E, alors $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{H_1 \cap H_2}$".

$F \doteq H_1 \cap H_2 = (H_1^\perp + H_2^\perp)^\perp$ (d'après la relation générale $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$ $\boxed{\mathrm{I}}$)

De plus $H_1^\perp \cap H_2^\perp = \{0\}$ (car $H_1^\perp \cap H_2^\perp \subset H_2 \cap H_2^\perp = \{0\}$), d'où la somme directe orthogonale :

$$E = H_1^\perp \overset{\perp}{\oplus} H_2^\perp \overset{\perp}{\oplus} (H_1 \cap H_2)$$

On constate que $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}$ et $\sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$ transforment tout x de $H_1^\perp$ ou $H_2^\perp$ en son opposé, et tout x de $H_1 \cap H_2$ en lui-même. D'où $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{H_1 \cap H_2}$

On aurait pu conclure en écrivant les matrices de σ_{H_1} et σ_{H_2}, soient M_1 et M_2, dans la base e obtenue en juxtaposant des bases orthonormales de $H_1^\perp$, de $H_2^\perp$ et de $H_1 \cap H_2$:

$$M_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H_1^\perp & H_2^\perp & H_1 \cap H_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} -I & & \\ \hline & I & \\ \hline & & I \end{array}\right) \end{array} \qquad M_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & -I & \\ \hline & & I \end{array}\right)$$

d'où $$M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -I & & 0 \\ & -I & \\ 0 & & I \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\sigma_{H_1 \cap H_2} ; e)$$

CQFD

$\boxed{\text{I4}}$ Soit $f \in O(E)$. On va montrer le résultat de cours suivant : "Il existe une b.o. e dans laquelle $\mathrm{Mat}(f\,;e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \boxed{S_{\theta_1}} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & \boxed{S_{\theta_q}} \end{pmatrix}$ où $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$" en utilisant le Th. de diagonalisation d'un opérateur unitaire (Ramis II 4.2.1 et 4.2.2 p 111). (La preuve directe est donnée en Ramis II.2.3.5 p 72). ($\boxed{T}$ Espaces hermitiens)

$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-e.v.

$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien $\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} \right) = \sum \bar{z}_i z_i'$.

La matrice A de f dans la b.o. e est orthogonale (${}^tA = A^{-1}$) réelle, donc unitaire (${}^t\bar{A} = A^{-1}$) si on la considère comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

C'est donc la matrice d'un endomorphisme unitaire $\tilde{f}$ de $\mathbb{C}^n$ et :

* Toutes les valeurs propres de A sont de module 1 : Si x est un vecteur propre associé à λ, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$

* Si λ et μ sont 2 v.p distinctes de $\tilde{f}$, les s.e.v. propres $E(\lambda)$ et $E(\mu)$ sont orthogonaux :
En effet, si $x \in E(\lambda)$ et $y \in E(\mu)$ $(fx, y) = \bar{\lambda}(x,y)$, et $f(y) = \mu y \Leftrightarrow y = \mu f^{-1}(y)$
donc $(fx, y) = (x, f^{-1}y) = \frac{1}{\mu}(x,y) = \bar{\mu}(x,y)$, finalement $\bar{\lambda}(x,y) = \bar{\mu}(x,y) \Rightarrow (x,y) = 0$.

* A est diagonalisable dans une b.o. de $\mathbb{C}^n$ (Ramis II 4.2.2 déjà cité)

* A étant réelle, $\chi_A(X) = \det(A - XI) \in \mathbb{R}[X]$ donc si λ est une v.p. de A de multiplicité k, $\bar{\lambda}$ sera une v.p. de A de multiplicité k.

On peut donc exhiber une b.o. $e' = (\underbrace{e_1', \dots, e_p'}_{\text{vecteurs propres associés à } 1}, \underbrace{e_{p+1}', \dots, e_{p+s}'}_{\text{vect. propres associés à } -1}, \underbrace{e_{p+s+1}', \dots, e_n'}_{\text{vect. propres associés à } \lambda \notin \mathbb{R}})$

1) On peut supposer que $e_1', \dots, e_{p+s}'$ sont des vecteurs réels (ie à coordonnées réelles) :
En effet, si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et si λ est une v.p. réelle de A, le sev propre $E(\lambda)$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}$-sev de $\mathbb{R}^n$ ou un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^n$. Notons le $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ou $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ suivant le cas. Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$, alors c'est aussi une base de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ puisque $e_1, \dots, e_n$ sont toujours libres dans $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$, et si $x \in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ $x \in \mathbb{C}^n$ et $A(x) = \lambda x$
$\Rightarrow A(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$, d'où $\frac{x+\bar{x}}{2}$ et $\frac{x-\bar{x}}{2i}$ dans $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$, donc s'expriment comme comb. lin. à coeff. réels de $e_1, \dots, e_n$. Donc $x = \frac{x+\bar{x}}{2} + i\left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right) \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_n)$ et e est bien une base de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ formée de vecteurs réels. CQFD

2) Vecteurs $e'_{p+s+1},\dots,e'_n$: On les associe 2 à 2 de sorte que :

$$(e'_j, e'_{j+1}) \qquad e'_j \in E(\lambda) \qquad e'_{j+1} = \overline{e'_j} \in E(\overline{\lambda})$$

car $x \in E(\lambda) \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x} \Leftrightarrow \overline{x} \in E(\overline{\lambda})$ montre que si λ est vp, $\overline{\lambda}$ l'est aussi et $\overline{E(\lambda)} = E(\overline{\lambda})$.

Enfin, dans chaque sev E_j de base orthonormale (e'_j, e'_{j+1}) on préfère la base $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}) = \left(\dfrac{e'_j + e'_{j+1}}{\sqrt{2}}, \dfrac{e'_j - e'_{j+1}}{i\sqrt{2}}\right)$ qui a le mérite d'être orthonormale $\left(\|\varepsilon_{j+1}\|^2 = \left|\frac{1}{i\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{i\sqrt{2}}\right|^2\right.$ $= 1 \dots)$ et formée de vecteurs réels (car $e'_{j+1} = \overline{e'_j}$).

Notons $\lambda = e^{i\theta}$ et $\overline{\lambda} = e^{-i\theta}$ les v.p. associées à e'_j et e'_{j+1}. La matrice représentant $\tilde{f}|_{E_j}$ dans la n^{elle} base $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})$ sera :

$$B_j = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = S_{-\theta} \qquad \text{puisque } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

<u>Ccl</u> : Il existe une b.o. $e'' = (e'_1, \dots, e'_{p+s}, \varepsilon_{p+s+1}, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$, formée de vecteurs réels et telle que :

$$M \doteq \mathrm{Mat}(\tilde{f}\,; e'') = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{p} & & & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{s} & & & \\ & & \boxed{S_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{S_{\theta_q}} \end{pmatrix}$$

Il existe donc P unitaire telle que $M = P^{-1}AP$. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers e'', qui est formée de <u>vecteurs réels</u>. P est donc à coefficients réels : elle est donc orthogonale.

‖ <u>M représentera bien la matrice de f dans une b.o de E</u>.

Dans notre problème, f est un déplacement donc la multiplicité de la v.p. -1 sera paire. On pourra associer les vecteurs de la b.o. de $\mathrm{Ker}(f + Id)$ 2 par 2 pour définir des rotations (en fait $-Id$) sur chacun des plans ainsi construits.
Finalement :

‖ $\forall f \in O^+(E) \quad \exists E_0 = \mathrm{Ker}(f - Id), E_1, \dots, E_q$ plans orthogonaux, stables par f
‖ tels que $\forall i \in \mathbb{N}_q \quad f|_{E_i}$ est une rotation et $E = E_0 \oplus \dots \oplus E_q$

Si $s = \dim \mathrm{Ker}(f - Id)$, on aura $s + 2q = n$ d'où $\boxed{q = \dfrac{n-s}{2}}$

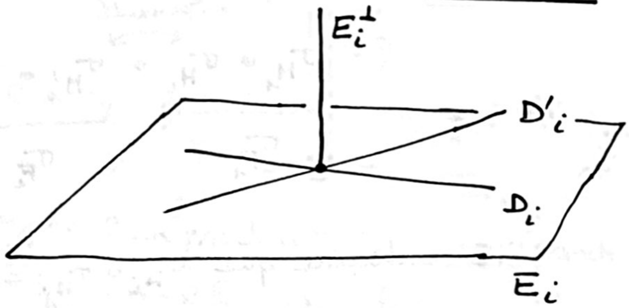
$\boxed{\text{I.5.a}}$ * $u_i|_{E_i}$ est une rotation plane et $u_i|_{E_i^\perp} = Id_{E_i^\perp}$. Comme $E = E_i \oplus E_i^\perp$ u_i sera une application orthogonale. La matrice de f étant

$$M = \begin{pmatrix} I_s & & & 0 \\ & S_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_{\theta_q} \end{pmatrix} \quad \text{où } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } I_s = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{s},$$

celle de u_i sera : $\quad Mat(u_i ; e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & S_{\theta_i} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$

dans une base orthonormale e convenable, d'où $\det u_i = \det S_{\theta_i} = 1 \Rightarrow \underline{u_i \in O^+(E)}$

* $u_i|_{E_i} = f|_{E_i}$ est une rotation plane, donc s'écrit comme composée de 2 symétries s_{D_i} et $s_{D'_i}$ par rapport à des droites :



$$u_i|_{E_i} = s_{D_i} \circ s_{D'_i}$$

Posons $\begin{cases} H_i = D_i \oplus E_i^\perp \\ H'_i = D'_i \oplus E_i^\perp \end{cases}$.

H_i et H'_i sont des hyperplans et $u_i = \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}$

(car $x \in E_i^\perp \Rightarrow \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}(x) = x$ et $u_i(x) = x$

$x \in E_i \Rightarrow \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}(x) = s_{D_i} \circ s_{D'_i}(x) = u_i|_{E_i}(x) = u_i(x)$ puisque $\sigma_{H_i}|_{E_i} = s_{D_i} \ldots$)

$\boxed{\text{I.5.b}}$

$H_j \cap H'_j = (D_j \oplus E_j^\perp) \cap (D'_j \oplus E_j^\perp) \supset E_j^\perp$ et $\dim H_j \cap H'_j = \dim H_j + \dim H'_j - \dim(H_j + H'_j)$
$= (n-1) + (n-1) - n = n-2$ car $H_j \neq H'_j$ (sinon $D_j = D'_j$ d'où $u|_{E_i} = s_{D_j} \circ s_{D_j} = Id$ impossible d'après le choix de I.4). De $\dim E_j^\perp = n - \dim E_j = n-2$ on déduit :

$$\boxed{H_j \cap H'_j = E_j^\perp} \quad (*)$$

Cela étant : $H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j = E_j^\perp \iff E_j \subset H_i$ ce qui est vrai

puisque $E_j \subset E_i^\perp \subset D_i \oplus E_i^\perp = H_i$.

CQFD

(*) Autre preuve : $x \in H_j \cap H'_j \Rightarrow x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ avec $x_1 \in D_j$, $x_2 \in E_j^\perp$, $x'_1 \in D'_j$, $x'_2 \in E_j^\perp$
$\Rightarrow x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 \in E_j^\perp \cap E_j = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 \in D_j \cap D'_j = \{0\} \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$ car $D_j \neq D'_j$ dans E_j (sinon $f|_{E_i} = Id_{E_i}$ à rejeter)
Donc $x = x_2 \in E_j^\perp$, et $H_j \cap H'_j \subset E_j^\perp$. L'inclusion inverse est triviale.

$\boxed{\text{I.5.c}}$

On a $f = u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_q$ car $\forall i \in \mathbb{N}_q$ $\forall x \in E_i$ $u_1 \circ \cdots \circ u_q(x) = u_i(x) = f(x)$ (en effet $u_j(x) = x$ dès que $j \neq i$).

I.5.a entraine bien : $f = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1} \circ \cdots \circ \sigma_{H_q} \circ \sigma_{H'_q}$

$\boxed{\text{I.5.d}}$ Soit $n-s > 2$, ie $q > 1$.

De $H_i^{\perp} \subset H_j \cap H'_j$ on déduit (I.3) que σ_{H_i} commute avec σ_{H_j} et $\sigma_{H'_j}$ donc :

on permute

$$f = \underbrace{\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}}_{\sigma_{F_1}} \circ \underbrace{\sigma_{H'_1} \circ \sigma_{H'_2}}_{\sigma_{F_2}} \circ \cdots \circ \underbrace{\sigma_{H_{q-1}} \circ \sigma_{H_q}}_{\sigma_{F_{q-1}}} \circ \underbrace{\sigma_{H'_{q-1}} \circ \sigma_{H'_q}}_{\sigma_{F_q}} \qquad (*).$$

I.3 entraine que $\sigma_{H_i} \circ \sigma_{H_j} = \sigma_{H_i \cap H_j}$ = retournement de base $H_i \cap H_j$.

On aura aussi $\sigma_{H'_i} \circ \sigma_{H'_j} = \sigma_{H'_j} \circ \sigma_{H'_i} = \sigma_{H'_i \cap H'_j}$ d'après I.3 puisque le même raisonnement qu'au I.5.b montre que $H_i'^{\perp} \subset H_j \cap H'_j$.

<u>Conclusion</u> : $f = \sigma_{F_1} \circ \cdots \circ \sigma_{F_q}$ est le produit de $q = \frac{n-s}{2}$ retournements dès que $n-s > 2$. , ~~$f = Id_E$ sera produit de 2 retournements~~. ~~Ainsi $O^+(E)$ est engendré par l'ensemble des retournements de E dès que $\dim E = n \geqslant 3$~~.

<u>NB</u> : Si $n-s = 2$, le résultat n'est plus assuré. Penser au contre-exemple : $n = 3$, f = rotation vect. d'axe Δ, $s = 1$ et f n'est pas la composée de $\frac{n-s}{2} = 1$ retournement en général ! Cela provient de $(*)$ où nous avons besoin de 4 symétries hyperplanes au moins pour pouvoir les permuter et conclure.

$\boxed{I.6}$

* Si $f = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_k}$ est le produit de k retournements, $F_1 \cap \dots \cap F_k \subset \mathrm{Ker}(f - Id)$ entraîne $\dim(F_1 \cap \dots \cap F_k) \leq \dim \mathrm{Ker}(f - Id)$.

Notons $F_i = G_i^\perp$ où $\dim F_i = n-2$ et $\dim G_i = 2$.

$$F_1 \cap \dots \cap F_k = G_1^\perp \cap \dots \cap G_k^\perp = (\underbrace{G_1 + \dots + G_k}_{\dim \leq 2k})^\perp \text{ sera de dimension } \geq n-2k.$$

Par suite $\boxed{n-2k \leq \dim F_1 \cap \dots \cap F_k \leq \dim \mathrm{Ker}(f - Id)}$

* Si $q \geq 2 \Leftrightarrow n-s > 2$, I.5.d a montré que $f = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_q}$ où $\dim F_i = n-2$, $q = \frac{n-s}{2}$ et $s = \dim \mathrm{Ker}(f - Id)$.

Soit $f = \sigma_{G_1} \circ \dots \circ \sigma_{G_k}$ une autre décomposition de f en produit de retournements.

Alors : $\dim \mathrm{Ker}(f - Id) = s \geq n-2k \Rightarrow n-2q \geq n-2k \Rightarrow k \geq q$.

<u>$f = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_q}$ est donc une décomposition minimale de f en produit de retournement dès que $n-s > 2$.</u>

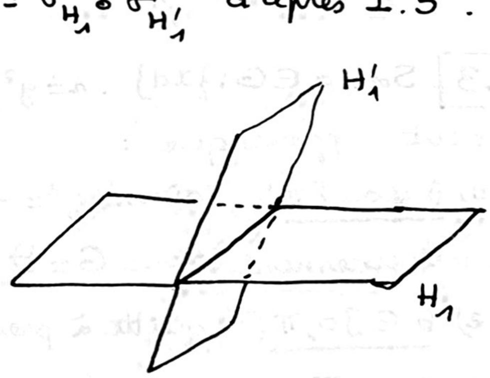
$\boxed{I.7}$ <u>Si $q = 1 \Leftrightarrow n-s = 2$, 2 cas sont possibles :</u>

1) Si $\mathrm{Mat}(f; e) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, f est un retournement de base E_1.

$\quad \overset{\longleftrightarrow}{E_0} \quad \overset{\longleftrightarrow}{E_1}$

2) Si $\mathrm{Mat}(f; e) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \boxed{S_\theta} \end{pmatrix}$ où $S_\theta \neq \pm I$, $f = u_1 = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_1'}$ d'après I.5.

$H_1 \neq H_1'$ (sinon $f = Id$ et $n-s = 0$) et il existe un hyperplan H perpendiculaire à H_1 et H_1' (H contenant les droites $H_1^\perp$ et $H_1'^\perp$), de sorte que :



$$f = \sigma_{H_1} \circ \sigma_H \circ \sigma_H \circ \sigma_{H_1'} = \sigma_{H_1 \cap H} \circ \sigma_{H \cap H_1'} \quad \text{d'après I.3.}$$

<u>Ccl</u> : <u>$O^+(E)$ est engendré par l'ensemble des retournements</u> et, dans chaque cas ($n-s = 2$ ou $n-s > 2$) nous avons exhibé des décompositions minimales.

II.1 $\det f\sigma_D f^{-1} = \det \sigma_D = 1$ donc $f\sigma_D f^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$.

Comme $f\sigma_D f^{-1} \neq Id$ (sinon $\sigma_D = Id$), $f\sigma_D f^{-1}$ sera une rotation d'axe et d'angle à déterminer.

$$f\sigma_D f^{-1}(x) = x \iff \sigma_D f^{-1}(x) = f^{-1}(x) \iff f^{-1}(x) \in D \iff x \in f(D)$$

L'axe est $f(D)$. On prouve ensuite que $\forall y \in f(D)^\perp$ $f\sigma_D f^{-1}(y) = -y$ comme dans la 2° sol. qui suit. ~~$\in f^{-1}(f(D)^\perp) = D^\perp$~~

~~Enfin, pour tout $x \in f(D)^\perp$, $(x \mid f\sigma_D f^{-1}x) = (f^{-1}x \mid \sigma_D f^{-1}x) = (f^{-1}x \mid -f^{-1}x) = -\|f^{-1}x\|^2 = -\|x\|^2$~~
~~donc $\cos(x, f\sigma_D f^{-1}x) = -1 \Rightarrow f\sigma_D f^{-1}x = -x$~~
~~$f\sigma_D f^{-1}$ sera le retournement d'axe $f(D)$:~~ $\boxed{\cancel{f\sigma_D f^{-1} = \sigma_{f(D)}}}$

2° solution : $E = f(D) \oplus f(D)^\perp$. Soit $x = y + z$ où $y = f(d) \in f(D)$ et $z \in f(D)^\perp$.

On a : $f\sigma_D f^{-1}(x) = f(d) + f\sigma_D f^{-1}(z) = y + f\sigma_D f^{-1}(z)$

f est une isométrie, donc $f(V^\perp) = f(V)^\perp$ pour tout sev V (car $x \in f(V^\perp) \iff$ $\exists y \in V^\perp$ $x = f(y) \iff f^{-1}(x).z = 0$ $\forall z \in V \iff x.f(z) = 0$ $\forall z \in V \iff x \in f(V)^\perp$).

Ici $z \in f(D)^\perp = f(D^\perp) \Rightarrow f^{-1}(z) \in D^\perp \Rightarrow f\sigma_D f^{-1}(z) = -z$.

On en déduit :
$$f\sigma_D f^{-1}(x) = y - z$$

ie $f\sigma_D f^{-1}$ est le retournement d'axe $f(D)$.

II.2 Si G contient un retournement d'axe D, il contiendra tous les retournements d'axe $f(D)$ pour tout $f \in \mathcal{O}^+(E)$ (II.1). Comme toute droite D' est l'image de D par une isométrie f, G contiendra tous les retournements donc tout $\mathcal{O}^+(E)$ (puisque les retournements engendrent $\mathcal{O}^+(E)$, cf I). Finalement $\boxed{G = \mathcal{O}^+(E)}$

II.3 Si $g \in G \setminus \{Id\}$ n'est pas un retournement, c'est une rotation d'axe D et d'angle $\theta \not\equiv 0$ $[\pi]$ (dans $D^\perp$ orienté arbitrairement). On peut supposer $\theta \in]0, 2\pi[$, puis $\theta \in]0, \pi[$ quitte à prendre g^{-1} au lieu de g.

* Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, c'est fini.
* Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, g^2 sera d'angle π ie un retournement donc $G = \mathcal{O}^+$ (II.2)
* Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $n\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et l'on prend $r = g^n$ (d'angle $n\theta$)

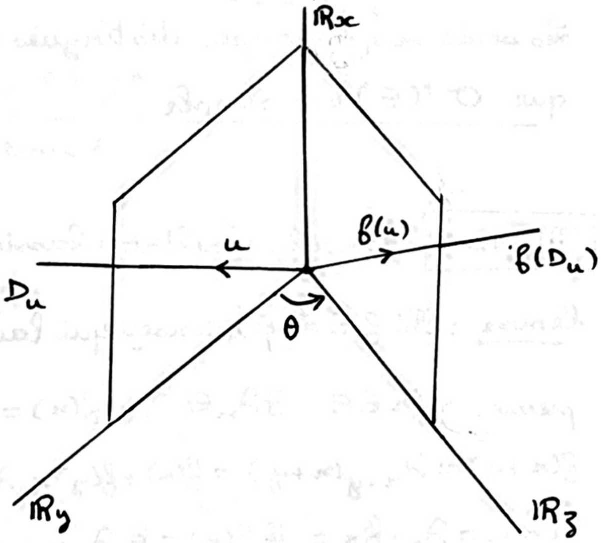
(En effet : $\frac{\pi}{2} < n\theta < \pi \iff \frac{\pi}{2\theta} < n < \frac{\pi}{\theta} \iff \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{2\theta} = \frac{\pi}{2\theta} > 1$)

Ccl : Dans tous les cas, G contient une rotation r d'angle appartenant à $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

$\boxed{\text{II.4}}$

<u>1^e solution</u> : Soient $\mathbb{R}x$ l'axe de f, $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$ et $\mathbb{R}z = \mathbb{R}(f(y))$.

Si u est un vecteur unitaire du plan Oxy et si $D_u = \mathbb{R}u$, $f(D_u)$ sera la droite dirigée par $f(u)$.



$f(D_u)$ est dans le plan Oxz et :

$u \longmapsto \cos(\widehat{u, f(u)})$ définit une fonction continue de u valant 1 quand $u = x$ et $\cos\theta$ pour $u \in \mathbb{R}y$.

Comme $\cos\theta < 0$, il existera $u_0 \in \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}x$ tel que $\cos(u_0, f(u_0)) = 0 \Rightarrow D_{u_0} \perp f(D_{u_0})$

CQFD

<u>2^e solution</u> : La matrice de la rotation r s'écrit, dans une base orthonormale adéquate :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

Notons $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\quad \vec{u} \perp r(\vec{u}) \iff x^2 + y(y\cos\theta - z\sin\theta) + z(y\sin\theta + z\cos\theta) = 0$

$$\iff x^2 + (y^2 + z^2)\cos\theta = 0$$

Comme $\cos\theta < 0$, il suffit de prendre $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\cos\theta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour obtenir un vecteur directeur de D telle que $D \perp r(D)$.

$\boxed{\text{II.5}}$ $\quad r \in G \Rightarrow f \circ r \circ f^{-1} \in G$ et comme $r^{-1} \in G$, $f \circ r \circ f^{-1} \circ r^{-1} \doteq h \in G$.

Notons $f = \sigma_D$. $\quad h = \sigma_D \circ r \circ \sigma_D \circ r^{-1} = \sigma_D\, \sigma_{r(D)}$ d'après II.1

Comme $D \perp r(D)$, $h = \sigma_D\, \sigma_{r(D)} = \sigma_{(D + r(D))^\perp}$ <u>est bien un retournement par rapport à une droite orthogonale à $r(D)$</u>. ($h = \sigma_D\, \sigma_{r(D)}$ est une rotation d'axe $(D + r(D))^\perp$ et d'angle plat puisque si $x \in D + r(D)$ $x = y + z$, $y \in D$, $z \in r(D)$ et $\sigma_D\, \sigma_{r(D)}(x) = \sigma_D(-y + z) = -y - z = -x$)

$\boxed{\text{II.6}}$ Tout sous-groupe distingué G de $O^+(E)$ distinct de $\{Id\}$, contiendra un retournement (II.5) donc sera égal à $O^+(E)$. (II.2)

Les seuls sous-groupes distingués de $O^+(E)$ sont donc $\{Id\}$ et $O^+(E)$. On dit que <u>$O^+(E)$ est simple</u>.

$\boxed{\text{III.1.a}}$ On a le résultat classique :

<u>lemme</u> : Un endomorphisme f qui laisse stable toute les dtes vect. est une homothétie vect.

preuve : $\forall x \in E \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda_x x$. Si x et y sont lin. indépendants, $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ entraîne $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$. Si $k \in \mathbb{R}$, $f(kx) = \lambda_{kx} kx = k f(x) = k \lambda_x x$ entraîne $\lambda_{kx} = \lambda_x$. Ainsi λ_x est indépendant du choix de x et $f = \lambda\, Id$. CQFD

Si $f \in O(E)$ laisse stable chaque droite, f sera donc une homothétie dont le rapport ne peut être que ± 1 (car $\|\lambda Id(x)\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$), ie $f = \pm Id$.

$\boxed{\text{III.1.b}}$

* <u>Z ?</u> Si $f \in Z$, $f\sigma_D = \sigma_D f$ pour toute droite $D = \mathbb{R}x$, d'où $f(x) = \sigma_D f(x)$ et $f(x) \in D$. f laissera stable toutes les dtes vectorielles, donc $f = \pm Id$.

La réciproque étant évidente : $\boxed{Z = \{\pm Id\}}$

* <u>Z^+</u> ? Si $f \in Z^+$, $f\sigma_F = \sigma_F f$ où $\dim F = n-2$ (de sorte que $\sigma_F \in O^+$).

Si $x \in F$, $f(x) = \sigma_F f(x)$ montre que $f(F) \subset F$ donc $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Tout plan $F^\perp$ de E est donc stable par f, donc toute droite de E est stable par f (comme intersection de 2 plans) d'où $f \in \{\pm Id\}$.

Concluons :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ pair, } Z^+ = \{\pm Id\} \\ \text{Si } n \text{ impair, } Z^+ = \{Id\} \end{cases}$$

$\boxed{III.2}$ Soit $g \in G \setminus \{\pm Id\}$. Si $g(P)=P$ pour tout plan P, $g(D)=D$ pour toute dte D (D étant intersection de 2 plans) donc $g=\pm Id$. Absurde.
Il existe donc P tel que $P \neq g(P)$.

$$\dim S = \dim(P+g(P)) = \underbrace{\dim P}_{2} + \underbrace{\dim g(P)}_{2} - \underbrace{\dim P \cap g(P)}_{0 \text{ ou } 1} = \begin{cases} 3 \\ \text{ou} \\ 4 \end{cases}$$

donc $\boxed{\dim S^\perp = n-4 \text{ ou } n-3}$.

Si $n \geq 5$, $\dim S^\perp \geq 1$ donc $\boxed{S^\perp \neq \emptyset}$

$\boxed{III.3}$ On pose $h = \sigma_{P^\perp}$ et $k = hgh^{-1}g^{-1}$.

* $k = \sigma_{P^\perp} \circ \underbrace{g \circ \sigma_{P^\perp} \circ g^{-1}}_{\sigma_{g(P^\perp)} \text{ d'après II.1}} = \sigma_{P^\perp} \circ \sigma_{g(P^\perp)}$. Soit $\boxed{k = \sigma_{P^\perp} \circ \sigma_{g(P^\perp)}}$

* $G \triangleleft O^+$ et $g \in G$ donc $\sigma_{P^\perp} g \sigma_{P^\perp}^{-1} \in G$. De plus $g^{-1} \in G$ entraine $\underline{k = \sigma_{P^\perp} g \sigma_{P^\perp} g^{-1} \in G}$

* Comme $S^\perp = (P+g(P))^\perp = P^\perp \cap g(P)^\perp$, on aura $\boxed{k|_{S^\perp} = Id_{S^\perp}}$

$\boxed{III.4}$ Le choix de z tel que $z = k(y) \neq \pm y$ est possible car $k(y) = \pm y$ pour tout $y \in E$ entraine que k conserve les droites de E, donc $k = \pm Id$ (III.1) ce qui est absurde car alors :

$$k = \sigma_{P^\perp} \sigma_{g(P^\perp)} = \pm Id \Leftrightarrow \sigma_{P^\perp} = \pm \sigma_{g(P^\perp)} \Leftrightarrow \begin{cases} P^\perp = g(P^\perp) \Leftrightarrow P = g(P) \text{ faux} \\ \text{ou} \\ P = g(P^\perp) \text{ absurde car } n \geq 5 \end{cases}$$

(dim $P = 2$ et dim $g(P^\perp) = n-2$)

a) $\ell \in O(E)$ étant le produit de 2 symétries hyperplanes qui sont dans $O^-(E)$, donc $\ell \in O^+(E)$.

On aura bien : $r = \underbrace{k}_{\in G} \underbrace{(\ell k^{-1} \ell^{-1})}_{\in G \text{ car } G \triangleleft O^+} \in G$

b) * On a $k \sigma_{x^\perp} k^{-1} = \sigma_{k(x^\perp)}$ d'après II.1, et $x \in S^\perp \Rightarrow k(x) = x$ (III.3)

d'où $\sigma_{k(x^\perp)} = \sigma_{k(x)^\perp} = \sigma_{x^\perp}$. Ainsi : $\boxed{k \circ \sigma_{x^\perp} = \sigma_{x^\perp} \circ k}$

* Puis : $r = k \sigma_{y^\perp} \underbrace{\sigma_{x^\perp} k^{-1} \sigma_{x^\perp}}_{k^{-1}} \sigma_{y^\perp} = \underbrace{k \sigma_{y^\perp} k^{-1}}_{\sigma_{k(y^\perp)} = \sigma_{k(y)^\perp} = \sigma_{z^\perp}} \sigma_{y^\perp} = \sigma_{z^\perp} \sigma_{y^\perp}$

Ainsi $\boxed{r = \sigma_{z^\perp} \circ \sigma_{y^\perp}}$

$\boxed{\text{III.5}}$ $r = \sigma_{z^\perp}\sigma_{y^\perp}$ donc $z^\perp \cap y^\perp \subset \ker(r - Id)$

$z^\perp$ et $y^\perp$ sont des hyperplans distincts de E (car $z^\perp = y^\perp \Rightarrow \mathbb{R}z = \mathbb{R}y \Rightarrow z = k(y) = \pm y$ faux)
donc $z^\perp \cap y^\perp$ est de dimension $n-2$ (car $\dim z^\perp \cap y^\perp = \dim z^\perp + \dim y^\perp - \dim(z^\perp + y^\perp)$
$= (n-1)+(n-1)-n = n-2$) et il existera un sev V de E de dimension $n-3$ inclus dans $z^\perp \cap y^\perp$. On aura $r|_V = Id_V$.

$\boxed{\text{III.6}}$ $r \in G$ et $r|_V = Id_V$ montre que :

- $V^\perp$ est stable par r
- $r|_{V^\perp} \in \mathcal{O}^+(V^\perp)$

Si $r|_{V^\perp}$ est un retournement de $\mathcal{O}^+(V^\perp)$, r sera un retournement de $\mathcal{O}^+(E)$.
Sinon, comme $\dim V^\perp = 3$, on peut appliquer II et construire un retournement h de $V^\perp$ à partir de la rotation $r|_{V^\perp}$ (II.3 à II.5)
On prolonge ce retournement par l'identité sur V pour obtenir un retournement de E, qui sera dans G.

Ccl : Si $G \neq \{\pm Id\}$, G contiendra un retournement, donc tous les retournements (II.1), donc $G = \mathcal{O}^+(E)$ (II.2, car les retournements engendrent $\mathcal{O}^+(E)$ d'après I)

$\boxed{\text{III.7}}$ Si $G \triangleleft \mathcal{O}^+(E)$, $G = \mathcal{O}^+(E)$ ou $G \subset \{\pm Id\}$.

Les sous-groupes distingués de $\mathcal{O}^+(E)$ sont donc :

$$\{Id\} \ , \ Z^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^+(E)$$

NB : Si n est impair, $Z^+ = \{Id\}$ et $\mathcal{O}^+(E)$ sera simple.