Problème

Les 4 premières questions de I sont en fait des rappels de cours, traités dans de nombreux manuels.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $(,)$. Si H est une partie de E, on définit $H^\perp$ par :

$$H^\perp = \{x \in E, \ \forall h \in H, \ (x, h) = 0\}$$

On désigne par GL (E) le groupe, pour la composition des applications, des applications linéaires bijectives de E sur E, et par O(E) le sous-groupe de GL (E) constitué des isométries :

$$O(E) = \{f \in GL(E), \forall (x, y) \in E \times E, \ (x, y) = (f(x), f(y))\}$$

$O^+(E)$ est le groupe des déplacements de E :

$$O^+(E) = \{f \in O(E), \ \det f = 1\} \quad \text{(où det f = déterminant de f).}$$

Si H est un sous-espace vectoriel de E, on désigne par σ_H la symétrie orthogonale par rapport à H. σ_H est un élément de O(E).
Si H est de codimension deux (c'est-à-dire de dimension $n - 2$), on dit que σ_H est un retournement.

I. 1. Prouver que $O^+(E)$ est un sous-groupe distingué de O(E) [c'est-à-dire que : $\forall g \in O(E), \ \forall f \in O^+(E), \ g \circ f \circ g^{-1} \in O^+(E)$]

2. Prouver que tout retournement appartient à $O^+(E)$.
Que peut-on dire de σ_H si H est un hyperplan de E ?

3. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1^\perp \subset H_2$.
Prouver que $H_2^\perp \subset H_1$, que $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$, et que cette isométrie est un retournement que l'on décrira.

4. Soit f un déplacement de E. Prouver qu'il existe des sous-espaces $E_o = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $E_1, \ldots, E_q$, deux à deux orthogonaux, stables par f, et tels que :

$$\begin{cases} i > 0 \Rightarrow \dim E_i = 2 \text{ et } f|E_i \text{ est une rotation.} \\ E = E_o \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_q \end{cases}$$

[On pourra utiliser la diagonalisation des matrices carrées unitaires : $A^{-1} = {}^tA$]. On note $s = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))$. Exprimer q à l'aide de s et n.

On pourra admettre cette question et traiter la suite du problème.

5. On suppose $n \geqslant 3$. Avec les notations de 4), on définit pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant q)$ un élément u_i de $GL(E)$ par les formules :

$$u_i|E_i = f|E_i \quad \text{(restrictions)}, \qquad u_i|E_i^{\perp} = Id.$$

a) Prouver que u_i est un déplacement de E, et qu'il existe deux droites D_i et D'_i de E_i telles que :

$$u_i = \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}$$

où on a posé : $H_i = D_i \oplus E_i^{\perp}$, $H'_i = D'_i \oplus E_i^{\perp}$.

Dans b) c) d) suivants, on suppose $n - s > 2$.

b) Prouver que :

$$\forall i, j \quad 1 \leqslant i, j \leqslant q \quad , \quad H_i^{\perp} \subset H_j \cap H'_j .$$

c) Prouver que : $f = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1} \circ \ldots \circ \sigma_{H_q} \circ \sigma_{H'_q}$

d) Utiliser 5. c), 5. b) et 3. pour prouver que f est le produit de q retournements.

6. En utilisant l'égalité : $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$ valable pour deux sous-espaces vectoriels A et B de E, prouver que la dimension de l'espace vectoriel des points fixes d'un produit de k retournements est supérieure ou égale à $n - 2k$.

En déduire que si $q \geqslant 2$, f s'exprime comme produit de q retournements mais pas comme produit de k retournements avec $k < q$.

7. Prouver que si $q = 1$, f est un retournement ou le produit de deux retournements.

II. Dans cette partie, $n = 3$. G est un sous-groupe distingué de $O^+(E)$:

$$\forall f \in O^+(E), \; \forall g \in G, \; f \circ g \circ f^{-1} \in G.$$

On suppose $G \neq \{Id\}$.

1) Décrire $f \circ g \circ f^{-1}$ si $g = \sigma_D$ (où D est une droite).

2) En utilisant la partie I, prouver que si G contient un retournement, alors $G = O^+(E)$.

3) Soit $g \in G - \{Id\}$, g n'étant pas un retournement. En utilisant les puissances de g ($g^2 = g \circ g$, $g^{n+1} = g^n \circ g$), prouver que G contient une rotation r dont l'angle appartient à $]\, \Pi/2 \,;\, \Pi\, [$

4) Prouver qu'il existe une droite D telle que D et r(D) soient orthogonales. [On pourra utiliser des coordonnées, et un argument de continuité.]

5) Soit $f = \sigma_D$. Prouver que : $h = f \circ r \circ f^{-1} \circ r^{-1}$ est un élément de G, et que c'est un retournement. Peut-on préciser la position de son axe par rapport à r(D) ?

6) Quels sont les sous-groupes distingués de $O^+(E)$?

III. Dans cette partie, à partir de la question 2), on suppose $n \geqslant 5$. G est un sous-groupe distingué non réduit à $\{\pm\, Id\}$ de $O^+(E)$.

1) Soit Z le centre de O(E) : $Z = \{f \in O(E),\ \forall g \in O(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.
Soit Z^+ le centre de $O^+(E)$: $Z^+ = \{f \in O^+(E),\ \forall g \in O^+(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

a) Prouver que si f est une isométrie conservant globalement toute droite de E, alors $f \in \{\pm\, Id\}$.

b) Déterminer Z et Z^+ (on pourra utiliser σ_H où H est un hyperplan, puis un espace de codimension 2).

2) Soit $g \in G$, $g \notin \{\pm\, Id\}$. Prouver qu'il existe un plan P (espace de dimension 2) tel que $P \neq g(P)$. On pose $S = P + g(P)$. Quelle est la dimension de $S^\perp$?

On pose $h = \sigma_{P^\perp}$, et $k = h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1}$

3) Exprimer k comme produit de deux retournements.
Prouver que k est dans G, et que k laisse stable $S^\perp$.
Que vaut la restriction $k|_{S^\perp}$?

4) Soit $x \in S^\perp \setminus \{0\}$ et y tel que $z = k(y) \neq \pm\, y$

a) Prouver que $\ell = \sigma_{y^\perp} \circ \sigma_{x^\perp}$ est un déplacement, et que
$r = k \circ \ell \circ k^{-1} \circ \ell^{-1}$ est dans G.

b) Prouver que $k \circ \sigma_{x^\perp} = \sigma_{x^\perp} \circ k$, puis que $r = \sigma_{z^\perp} \circ \sigma_{y^\perp}$.

5. Prouver qu'il existe un sous-espace V de E de codimension 3 stable par r, tel que $r|_V = Id|_V$.
6. Déduire de III. 5. et de II que G contient un retournement.
7. Quels sont les sous-groupes distingués de $O^+(E)$.

Remarque. Le cas $n=4$ n'est pas étudié ici. Il nécessite l'utilisation des quaternions.