Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP517, Abymes, cedex 97178, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

23 octobre 2005

Dans ce chapitre, on désigne par K le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$, et par E un espace vectoriel normé de dimension finie sur K. On note $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$ l'algèbre de Banach des endomorphismes de E. Ce chapitre est une application directe du cours sur la réduction des endomorphismes [1].

1 Exponentielle d'un opérateur

Le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ est infini de sorte que cette série converge sur tout $\mathbb{R}$ (vers e^x). Si $u\in\mathcal{L}(E)$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\|u\|^n}{n!}$ convergera, et par conséquent la série $\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!}$ sera normalement convergente sur toute boule fermée B de centre O de $\mathcal{L}(E)$. On définit ainsi un opérateur noté e^u et appelé **l'exponentielle de** u :

$$e^u=\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!}.$$

Théorème 1 *On a :*
(1) $e^0=Id.$
(2) $\forall u,v\in\mathcal{L}(E)\quad uv=vu\Rightarrow e^{u+v}=e^ue^v.$
En particulier e^u *est inversible et* $(e^u)^{-1}=e^{-u}.$
(3) $\forall u,v\in\mathcal{L}(E)\quad uv=vu\Rightarrow ue^v=e^vu.$
(4) $\forall u\in\mathcal{L}(E)\quad \|e^u\|\leq e^{\|u\|}.$

[0] [ceql0001] /cmon0005 v1.00 http://perso.wanadoo.fr/megamaths

Preuve : Seul (2) présente une difficulté. On a

$$e^u.e^v = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{u^n}{n!}\right)\left(\sum_{p=0}^{N}\frac{v^p}{p!}\right) = \lim_{N\to+\infty} A_N \quad \text{avec } A_N = \sum_{\substack{0\leq n\leq N\\ 0\leq p\leq N}}\frac{u^n v^p}{n!p!},$$

$$e^{u+v} = \sum_{k=0}^{N}\frac{(u+v)^k}{k!} = \lim_{N\to+\infty} B_N \quad \text{avec } B_N = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n+p=k}\frac{u^n v^p}{n!p!}.$$

Si l'on représente dans le plan les points de coordonnées entières (n,p) sur lesquels on somme, on constate que A_N correspond à un carré et que B_N correspond à un triangle contenu dans ce carré. Par suite

$$\|A_N - B_N\| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty}\sum_{n+p=k}\frac{\|u\|^n\|v\|^p}{n!p!} = \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{(\|u\|+\|v\|)^k}{k!}$$

et cette dernière somme tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, puisque la série $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$. ■

Théorème 2 *Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R},+) & \to & (\mathcal{L}(E),\circ) \\ & t & \mapsto & e^{tu} \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(t) = ue^{tu} = e^{tu}u$.

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \frac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h} = e^{tu}\frac{e^{hu}-Id}{h} = \frac{e^{tu}}{h}\sum_{n\geq 1}\frac{(hu)^n}{n!} \\ &= e^{tu}\sum_{n\geq 1}\frac{h^{n-1}u^n}{n!} = e^{tu}u + e^{tu}h\sum_{n\geq 2}\frac{h^{n-2}u^n}{n!}.\end{aligned}$$

L'expression $e^{tu}h$ tend vers 0 quand h tend vers 0, et la fonction qui a h associe $\sum_{n\geq 2}\frac{h^{n-2}u^n}{n!}$ est bornée quand $|h|\leq 1$ (on peut en effet écrire la majoration $||\sum_{n\geq 2}\frac{h^{n-2}u^n}{n!}|| \leq \sum_{n\geq 2}\frac{||u||^n}{n!}$ dès que $|h|\leq 1$). Par conséquent $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = e^{tu}u$. ■

Théorème 3 *Soient $M:\mathbb{R}\to\mathcal{L}(E)$ et $x:\mathbb{R}\to E$ deux fonctions dérivables (resp. de classe C^1). Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & E \\ & t & \mapsto & M(t)\,x(t) \end{array}$$

est dérivable (resp. de classe C^1) et $g'(t) = M'(t)\,x(t) + M(t)\,x'(t)$.

Preuve : La démonstration est calquée sur celle de la dérivabilité d'un produit (qu'il faut savoir retrouver). Pour t fixé, il s'agit de montrer que

$$\Delta = \frac{g\left(t+h\right) - g\left(t\right)}{h} - \big(M'\left(t\right)x\left(t\right) + M\left(t\right)x'\left(t\right)\big)$$

tend vers 0 quand h tend vers 0. On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{h}\left[M\left(t+h\right)x\left(t+h\right) - M\left(t\right)x\left(t\right)\right] - \big(M'\left(t\right)x\left(t\right) + M\left(t\right)x'\left(t\right)\big) \\
&= M\left(t+h\right)\frac{x\left(t+h\right) - x\left(t\right)}{h} + \frac{M\left(t+h\right) - M\left(t\right)}{h}x\left(t\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - M'\left(t\right)x\left(t\right) - M\left(t\right)x'\left(t\right) \\
&= M\left(t+h\right)\left[\frac{x\left(t+h\right) - x\left(t\right)}{h} - x'\left(t\right)\right] \\
&\quad + \left[\frac{M\left(t+h\right) - M\left(t\right)}{h} - M'\left(t\right)\right]x\left(t\right) + \left(M\left(t+h\right) - M\left(t\right)\right)x'\left(t\right).
\end{aligned}$$

Majorons $||\Delta||$ par la somme des trois normes, et donnons-nous un réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $h \mapsto ||M\left(t+h\right)||$ est bornée au voisinage de 0 car M est continue en t. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\|M\left(t+h\right)\| \leq a$ pour tout h vérifiant $\|h\| \leq \eta_1$. Par hypothèses, on a

$$||\frac{x\left(t+h\right) - x\left(t\right)}{h} - x'\left(t\right)|| \leq \varepsilon$$

dès que $\|h\| \leq \eta_2$,

$$||\frac{M\left(t+h\right) - M\left(t\right)}{h} - M'\left(t\right)|| \leq \varepsilon$$

dès que $\|h\| \leq \eta_3$, et $\|M\left(t+h\right) - M\left(t\right)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|h\| \leq \eta_4$. Finalement, si l'on pose $\eta = \operatorname{Min}\left(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\right)$, on obtient bien l'implication

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad \|h\| \leq \eta \Rightarrow \|\Delta\| \leq \big(a + \|x\left(t\right)\| + \big\|x'\left(t\right)\big\|\big)\,\varepsilon. \blacksquare$$

2 Systèmes linéaires d'ordre 1 sans second membre

2.1 Théorème fondamental

Un système différentiel linéaire d'ordre 1 sans second membre est la donnée d'une équation (H) : $x'\left(t\right) = ux\left(t\right)$ où $u \in \mathcal{L}\left(E\right)$ est fixé. **L'inconnue** $x\left(t\right)$ est une fonction dérivable $t \mapsto x\left(t\right)$ de $\mathbb{R}$ dans E. Toute fonction dérivable $t \mapsto x\left(t\right)$ de $\mathbb{R}$ dans E vérifiant (H) est appelée **solution du système**

différentiel (H). Si l'on rapporte E à une base $e = (e_1, ..., e_n)$ et si l'on note (a_{ij}) la matrice de u dans e, le système différentiel (H) s'écrit

$$x'(t) = Mx(t)$$

où $x(t) = {}^t(x_1(t), ..., x_2(t))$ désigne le vecteur-colonne des coordonnées de $x(t)$ dans la base e. In extenso, le système (H) s'écrit

$$\begin{cases} x'_1(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j(t). \end{cases}$$

Le **problème de Cauchy** relatif à l'équation différentielle (H) et aux conditions initiales $(t_0, x_0) \in K \times E$ est celui de la recherche des solutions du système (H) vérifiant $x(t_0) = x_0$.

Théorème 4
1) Le système (H) : $x'(t) = ux(t)$ admet la fonction $x(t) = e^{(t-t_0)u}(x_0)$ pour unique solution satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.
2) L'ensemble S des solutions de (H) est un K-espace vectoriel de dimension n.

Preuve : 1) La fonction $x(t) = e^{(t-t_0)u}(x_0)$ est clairement solution de (H) et vérifie $x(t_0) = x_0$. Si $x(t)$ est une autre solution de (H), il suffit de poser $g(t) = e^{-tu}x(t)$ et de calculer $g'(t) = -ue^{-tu}x(t) + e^{-tu}x'(t) = 0$ pour pouvoir affirmer que $g(t)$ est une fonction constante. En posant $g(t) = c \in E$, on obtient $x(t) = e^{tu}(c)$. La condition initiale $x(t_0) = x_0$ nous donne la valeur de la constante : $c = e^{-t_0 u}(x_0)$. Finalement

$$x(t) = e^{tu}\left(e^{-t_0 u}(x_0)\right) = e^{(t-t_0)u}(x_0).$$

2) L'ensemble S est clairement un K-espace vectoriel et l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & S \\ & x_0 & \mapsto & x(t) = e^{tu}(x_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, φ est linéaire, surjective puisque toute solution x dans S s'écrit $x(t) = e^{tu}(x_0)$ avec $x_0 = x(0)$ d'après le 1), et injective car

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = e^{tu}(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0. \blacksquare$$

2.2 Structure des solutions complexes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons λ_1, ..., λ_p les valeurs propres de u, puis α_1, ..., α_p les multipicités correspondantes de ces valeurs propres dans le polynôme ca-ractéristique χ_u de u, et enfin $N(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i. On sait que (voir [1])

$$\begin{array}{ll} (1) & \dim N(\lambda_i) = \alpha_i, \\ (2) & E = N(\lambda_1) \oplus ... \oplus N(\lambda_p), \\ (3) & N(\lambda_i) \text{ est stable par } u. \end{array}$$

Tout vecteur x de E se décompose en $x = y_1 + ... + y_p$ avec $y_i \in N(\lambda_i)$, donc

$$\begin{aligned} e^{tu}(x) &= \sum_{i=1}^{p} e^{tu}(y_i) = \sum_{i=1}^{p} e^{t\lambda_i Id} e^{t(u-\lambda_i Id)}(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} t^k \frac{(u-\lambda_i Id)^k}{k!}(y_i) \qquad (\text{car } e^{t\lambda_i Id} = e^{t\lambda_i} Id) \\ &= \sum_{i=1}^{p} P_i(t) e^{t\lambda_i} \end{aligned}$$

où $P_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha_i-1} \frac{(u-\lambda_i Id)^k}{k!}(y_i) t^k$ est un polynôme en t à coefficients dans E. On peut énoncer

Théorème 5 ***(Structure des solutions complexes)***
Les solutions de (H) : $x'(t) = ux(t)$ sont de la forme $x(t) = \sum_{i=1}^{p} P_i(t) e^{t\lambda_i}$ où les λ_i désignent les valeurs propres de u et où les $P_i(t)$ sont des polynômes de $E[t]$ de degrés $\deg P_i < \alpha_i$, α_i représentant la multipicité de λ_i dans le polynôme caractéristique de u.

Théorème 6 *Si toutes les valeurs propres de u sont simples, les solutions de (H) sont exactement les fonctions $x(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i e^{t\lambda_i}$ où y_i décrit le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda_i Id)$ de u associé à λ_i.*

2.3 Calcul pratique des solutions complexes

On remplace $x(t)$ par l'expression $\sum_{i=1}^{p} P_i(t) e^{t\lambda_i}$ dans l'équation (H), pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(P_i'(t) + \lambda_i P_i(t)\right) e^{t\lambda_i}}_{\in N(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{u(P_i(t)) e^{t\lambda_i}}_{\in N(\lambda_i)}$$

Les appartenance à $N(\lambda_i)$ se vérifient en remarquant que tous les coefficients des P_i sont dans $N(\lambda_i)$, $N(\lambda_i)$ étant stable par u et donc par $u - \lambda_i Id$. La somme directe $E = N(\lambda_1) \oplus ... \oplus N(\lambda_p)$ permet d'écrire

$$P_i'(t) + \lambda_i P_i(t) = u(P_i(t))$$

pour tout indice i, et cela déterminera parfaitement les polynômes P_i. Cette méthode de résolution est dite "**par identification**".

2.4 Solutions réelles

Si (H) est un système différentiel réel, la matrice de u est à coefficient réels. Le polynôme caractéristique de u l'est aussi et ses racines sont soit réelles, soit conjuguées. Notons λ_1, ..., λ_p les valeurs propres réelles de u, α_1, ..., α_p leurs multiplicités, μ_1, ..., μ_q, $\overline{\mu}_1$, ..., $\overline{\mu}_q$ les valeurs propres complexes non réelles et γ_1, ..., γ_p les multipicités de μ_1, ..., μ_q. L'application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est aussi une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, et l'on connaît parfaitement les solutions complexes de (H). Pour obtenir toutes les solution réelles de (H), le plus simple est d'utiliser le

Lemme 1 *La fonction $x(t)$ est une solution réelle de $(H) : x'(t) = ux(t)$ si et seulement si c'est la partie réelle d'une solution complexe.*

Preuve : Toute solution réelle est bien la partie réelle d'elle-même. Réciproquement, toute solution complexe de (H) s'écrit $x(t) = y(t) + iz(t)$ et $y'(t) + iz'(t) = uy(t) + iuz(t)$ entraîne $y'(t) = uy(t)$, autrement dit $y(t)$ est encore solution de (H). ■

Une autre méthode possible consiste à donner a priori la forme des solutions, puis à ré-injecter l'expression dans l'équation différentielle. Cette méthode, dite "**par identification**", est basée sur le Théorème suivant :

Théorème 7 ***(Structure des solutions réelles)***
Les solutions réelles de l'équation $(H) : x'(t) = ux(t)$ sont de la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} P_i(t) e^{t\lambda_i} + \sum_{i=1}^{q} Q_i(t) e^{t\mu_i} + \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_i(t)} e^{t\overline{\mu}_i}$$

où $P_i(t) \in \mathbb{R}^n[t]$ sont des polynômes de degrés $\deg P_i < \alpha_i$, et $Q_i(t) \in \mathbb{C}^n[t]$ avec $\deg Q_i < \gamma_i$.

Preuve : Tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique en

$$x = y_1 + ... + y_p + z_1 + ... + z_q + z_1' + ... + z_q' \qquad (1)$$

avec $y_i \in N(\lambda_i)$, $z_i \in N(\mu_i)$ et $z_i \in N(\overline{\mu}_i)$ donnés par le Théorème 5. Si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \overline{x} = \overline{y}_1 + ... + \overline{y}_p + \overline{z}_1 + ... + \overline{z}_q + \overline{z}'_1 + ... + \overline{z}'_q. \qquad (2)$$

Les équations (1), (2) et le Lemme ci-dessous entraînent $y_i = \overline{y}_i$ et $z_i = \overline{z}'_i$ pour tout i, soit $y_i \in \mathbb{R}$ et

$$x = y_1 + ... + y_p + z_1 + ... + z_q + \overline{z}_1 + ... + \overline{z}_q.$$

Toute solution réelle s'écrira donc

$$e^{tu}(x) = \sum_{i=1}^{p} e^{tu}(y_i) + \sum_{i=1}^{q} e^{tu}(z_i) + \sum_{i=1}^{q} e^{tu}(\overline{z}_i).$$

En reconduisant le même calcul qu'au Théorème 5, on trouve

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} P_i(t) e^{t\lambda_i} + \sum_{i=1}^{q} Q_i(t) e^{t\mu_i} + \sum_{i=1}^{q} R_i(t) e^{t\overline{\mu}_i}$$

avec

$$Q_i(t) = \sum_{k=0}^{\gamma_i - 1} t^k \frac{(u - \mu_i Id)^k}{k!}(z_i) \text{ et } R_i(t) = \sum_{k=0}^{\gamma_i - 1} t^k \frac{(u - \overline{\mu}_i Id)^k}{k!}(\overline{z}_i) = \overline{Q_i(t)}$$

de la forme désirée. ■

Lemme 2 *On a $\overline{N(\mu)} = N(\overline{\mu})$ pour toute valeur propre μ de u.*

Preuve : Les racines μ et $\overline{\mu}$ ont même multiplicité α dans χ_u, donc

$$x \in N(\mu) \Leftrightarrow (u - \mu Id)^{\alpha}(x) = 0 \Leftrightarrow (u - \overline{\mu} Id)^{\alpha}(\overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \in N(\overline{\mu}),$$

ce qui entraîne $\overline{N(\mu)} \subset N(\overline{\mu})$. Réciproquement, tout $y \in N(\overline{\mu})$ s'écrit $y = \overline{x}$ et les équivalence ci-dessus entraînent $x \in N(\mu)$, soit $y \in \overline{N(\mu)}$. ■

2.5 Etude des systèmes différentiels 2×2

Etudions les trajectoires des solutions de l'équation

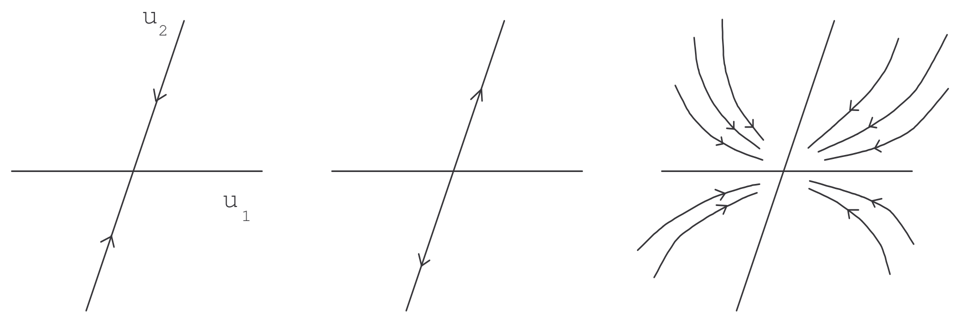
$$(H) \quad x'(t) = Mx(t)$$

où la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est à coefficients réels.

a) Si M possède deux valeurs propres distinctes λ et μ ($\lambda < \mu$), alors M est diagonalisable et les solutions de (H) sont les fonctions $x(t) = c_1 e^{\lambda t} \overrightarrow{u_1} + c_2 e^{\mu t} \overrightarrow{u_2}$ où $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ désigne une base de vecteurs propres de M. La trajectoire des solutions est l'arc paramétré

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

et l'on obtient l'une des allures de courbes suivantes :



$c_1 = 0$, $c_2 > 0$ et $\mu < 0$ $\qquad$ $c_1 = 0$, $c_2 > 0$ et $\mu > 0$ $\qquad$ $c_1 c_2 \neq 0$ et $\lambda < \mu < 0$

Si $c_1 c_2 \neq 0$, l'origine est stable si $\lambda < \mu < 0$ (cela signifie que l'on est amené vers l'origine lorque le paramètre t croît), et instable si $0 < \lambda < \mu$. Dans les deux cas, les trajectoires sont les mêmes mais sont parcourues en sens inverse.

b) Si M possède deux valeurs propres réelles confondues, on envisage deux cas :

• Si M est diagonalisable, les solutions de (H) sont les fonctions

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \overrightarrow{u_1} + c_2 e^{\lambda t} \overrightarrow{u_2}$$

où $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de vecteurs propres de M. La trajectoire est une demi-droite de vecteur directeur $c_1 \overrightarrow{u_1} + c_2 \overrightarrow{u_2}$.

• Si M n'est pas diagonalisable, alors $\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda Id) = 1$ et

$$E = \operatorname{Ker}(M - \lambda Id)^2 \not\supset \operatorname{Ker}(M - \lambda Id) = E(\lambda).$$

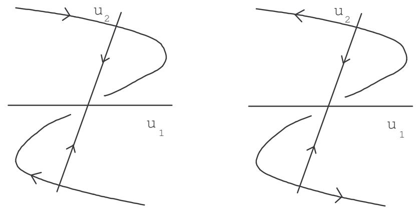
Si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de E telle que $\overrightarrow{u_1} \in E(\lambda)$ et $\overrightarrow{u_2} \in E \backslash E(\lambda)$, une solution de (H) s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tu}(x_0) \\ &= e^{\lambda t} e^{t(u - \lambda Id)} (c_1 \overrightarrow{u_1} + c_2 \overrightarrow{u_2}) = e^{\lambda t} c_1 \overrightarrow{u_1} + e^{\lambda t} c_2 (\overrightarrow{u_2} + t(u - \lambda Id) \overrightarrow{u_2}) \end{aligned}$$

Comme $(u-\lambda Id)\overrightarrow{u_2}\in E(\lambda)$, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $(u-\lambda Id)\overrightarrow{u_2}=a\overrightarrow{u_1}$, et l'on obtient $x(t)=(c_1+c_2at)\,e^{\lambda t}\overrightarrow{u_1}+e^{\lambda t}c_2\overrightarrow{u_2}$. Les trajectoires des solutions admettent la paramétrisation

$$\begin{cases} x_1(t)=(c_1+bt)\,e^{\lambda t} \\ x_2(t)=c_2e^{\lambda t}, \end{cases}$$

et les allures des trajectoires seront :



$\lambda>0$ $\lambda<0$

c) Si M possède deux valeurs propres complexes non réelles $\lambda=\alpha+i\beta$ et $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$, la forme générale des solutions réelles est $x(t)=ye^{\lambda t}+\overline{y}e^{\overline{\lambda}t}$ où $y=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}^2$ et $y\in E(\lambda)$. Comme $\overline{y}\in E\left(\overline{\lambda}\right)$ et $\mathbb{C}^2=E(\lambda)\oplus E\left(\overline{\lambda}\right)$, le couple $(y,\overline{y})$ est une base de $\mathbb{C}^2$ et

$$(a,b)=(\operatorname{Re}y,\operatorname{Im}y)=\left(\frac{y+\overline{y}}{2},\frac{y-\overline{y}}{2}\right)$$

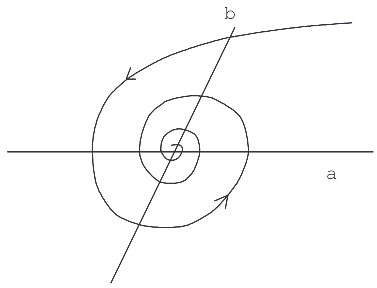
sera une base de $\mathbb{C}^2$ formée de deux vecteurs réels. Dans cette base (a,b) :

$$x(t)=(a+ib)\,e^{\alpha t}e^{i\beta t}+(a-ib)\,e^{\alpha t}e^{-i\beta t}=2e^{\alpha t}\,(a\cos\beta t-b\sin\beta t)$$

et la représentation paramétrique d'une trajectoire $t\mapsto x(t)$ sera de la forme

$$\begin{cases} x_1(t)=2e^{\alpha t}\cos\beta t \\ x_2(t)=-2e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{cases}$$

Le diagramme est stable si $\alpha<0$, instable si $\alpha>0$, et la trajectoire est une ellipse si $\alpha=0$.



3 Systèmes linéaires d'ordre 1 avec second membre

Donnons-nous une fonction $f : \mathbb{R} \to E$ continue. **Un système différentiel du premier degré avec second membre** est une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad x'(t) = ux(t) + f(t).$$

L'équation sans second membre associée est

$$(H) \quad x'(t) = ux(t).$$

Elle est encore appelée **équation homogène associée**.

3.1 Résultats fondamentaux

Théorème 8 ***(Méthode de variation des constantes de Lagrange)*** *Il existe au moins une solution de l'équation (E) de la forme $x(t) = e^{ut}(c(t))$ où $c(t)$ est une fonction à déterminer.*

Preuve : On a $x'(t) = ue^{ut}(c(t)) + e^{ut}(c'(t))$ et

$$(E) \;\Leftrightarrow\; e^{ut}\left(c'(t)\right) = f(t) \;\Leftrightarrow\; c'(t) = e^{-ut}(f(t)).$$

La fonction $t \mapsto e^{-ut}(f(t))$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, et il suffit de prendre $c(t) = \int_0^t e^{-ut}(f(t))\, dt$ pour conclure. ■

Théorème 9 *Toutes les solutions de (E) sont obtenues en additionnant une solution quelconque de l'équation sans second membre (H) à une solution particulière de l'équation avec second membre.*

Preuve : Si $y(t)$ est une solution particulière de (E),

$$\begin{aligned} x'(t) = ux(t) + f(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'(t) = ux(t) + f(t) \\ y'(t) = uy(t) + f(t) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)'(t) = u(x-y)(t) \\ &\Leftrightarrow \quad x - y \text{ solution de } (E) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists c \in E \quad x = y + e^{ut}(c) . \blacksquare \quad (*) \end{aligned}$$

Corollaire 1 ***(Unicité du problème de Cauchy)***
Il existe une et une seule solution de (E) satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$. C'est $x(t) = y(t) + e^{u(t-t_0)}(x_0 - y(t_0))$.

Preuve : Les solutions de (E) sont les fonctions $x(t) = y + e^{ut}(c)$ où $c \in E$ et où $y(t)$ désigne une solution particulière de (E). On détermine le vecteur c pour avoir $x(t_0) = x_0$. On trouve $x_0 = y(t_0) + e^{ut_0}(c)$ d'où $c = e^{-ut_0}(x_0 - y(t_0))$. $\blacksquare$

Le Théorème 9 montre à quel point la recherche d'une solution particulière de l'équation (E) est importante. Dans la pratique, la recherche d'une solution particulière de (E) se fait soit par la méthode de variation des constantes de Lagrange (Théorème 8), soit par la méthode d'identification exposée dans la Section suivante.

Remarquons bien que la recherche d'une solution particulière de

$$x'(t) = ux(t) + f(t) + g(t)$$

peut s'effectuer en superposant plusieurs solutions particulières d'autres équations plus simples. Cela signifie qu'on cherche d'abord une solution particulière $y(t)$ de $x'(t) = ux(t) + f(t)$, puis une solution particulière $z(t)$ de l'équation $x'(t) = ux(t) + g(t)$, pour finalement constater que $y(t) + z(t)$ est solution particulière de $x'(t) = ux(t) + f(t) + g(t)$. Un exemple complet de résolution est donné à la Section 4.

3.2 Second membre de la forme $e^{\mu t}Q(t)$

Théorème 10 *Soient $\mu \in \mathbb{C}$ et $Q(t) \in E[t]$. L'équation différentielle*

$$(E) \quad x'(t) = ux(t) + e^{\mu t}Q(t)$$

admet au moins une solution particulière de la forme $e^{\mu t}P(t)$ où P est un polynôme de degré $\deg P = \deg Q + \operatorname{mult}(\mu)$, l'entier $\operatorname{mult}(\mu)$ désignant l'ordre de multiplicité de μ dans le polynôme caractéristique de u.

Preuve : Notons $r = \text{mult}(\mu)$, $Q(t) = \sum_{k=0}^{m} q_k t^k$ et $P(t) = \sum_{k=0}^{m+r} p_k t^k$ où p_k et q_k désignent des vecteurs de E. La fonction $x(t) = e^{\mu t} P(t)$ est solution de (E) si, et seulement si,

$$\mu e^{\mu t} P(t) + e^{\mu t} P'(t) = u e^{\mu t} P(t) + e^{\mu t} Q(t)$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} (u - \mu Id) P(t) &= P'(t) - Q(t) \\ \sum_{k=0}^{m+r} (u - \mu Id)(p_k) t^k &= \sum_{k=0}^{m} [(k+1) p_{k+1} - q_k] t^k \\ \forall k \in \{0, 1, ..., m+r\} \quad (u - \mu Id)(p_k) &= (k+1) p_{k+1} - q_k. \quad (*) \end{aligned}$$

• Si $r = 0$, l'endomorphisme $u - \mu Id$ est inversible et $(*)$ équivaut à

$$\begin{cases} p_m = (u - \mu Id)^{-1} (-q_m) \\ p_{m-1} = (u - \mu Id)^{-1} (m p_m - q_{m-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_0 = (u - \mu Id)^{-1} (p_1 - q_0) \end{cases}$$

Dans ce cas, le polynôme P est unique.

• Si $r > 0$, décomposons p_k et q_k dans la somme directe $E = N(\lambda_1) \oplus ... \oplus N(\lambda_l)$ des sous-espaces caractéristiques :

$$\begin{cases} p_k = p_{k,\lambda_1} + ... + p_{k,\lambda_l} \\ q_k = q_{k,\lambda_1} + ... + q_{k,\lambda_l}. \end{cases}$$

Supposons $\mu = \lambda_1$, et notons u_i la restriction de u à $N(\lambda_i)$. L'équation $(*)$ équivaut à

$$\forall i \quad \forall k \in \{0, 1, ..., m+r\} \quad (u_i - \mu Id)(p_{k,\lambda_i}) = (k+1) p_{k+1,\lambda_i} - q_{k,\lambda_i}. \quad (**)$$

Si $i \neq 1$, l'endomorphisme $u_i - \mu Id$ est inversible et le système $(**)$ possède une solution d'après le premier cas. Si $i = 1$, alors $(u_1 - \mu Id)^r = 0$ et il suffit de choisir $p_{0,\mu}$ quelconque et définir les $p_{k,\lambda_1} = p_{k,\mu}$ tels que

$$\forall k \in \{0, 1, ..., m\} \quad p_{k+1,\mu} = \frac{1}{k+1} [(u_1 - \mu Id)(p_{k,\mu}) + q_{k,\mu}]$$

pour que les $m+1$ premières équations de $(**)$ soient satisfaites. Ensuite, $p_{m+1,\mu}$ étant imposé, il suffit de voir que l'on doit seulement vérifier

$$\forall k \in \{m+1, ..., m+r\} \quad p_{k+1,\mu} = \frac{1}{k+1} (u_1 - \mu Id)(p_{k,\mu})$$

C'est possible. On remarque surtout que

$$p_{m+r+1,\mu} = \frac{1}{(m+r+1)(m+r)\dots(m+2)}(u_1 - \mu Id)^r (p_{m+1,\mu}) = 0$$

puisque $(u_1 - \mu Id)^r = 0$, ce qui prouve que le nombre de coefficients $p_{k,\mu}$ est fini et achève la preuve. On a ici trouvé une infinité de polynômes P répondant à la question. ■

Remarque : Le Théorème 10 peut être utilisé dans les cas où le second membre $f(t)$ est de la forme $Q(t)\cos t$, $Q(t)\sin t$, $Q(t)\operatorname{ch} t$ ou encore $Q(t)\operatorname{sh} t$. Il suffit de superposer les solutions en notant que $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ etc.

4 Exemple

Cherchons les solutions complexes du système différentiel avec second membre

$$(E)\quad \begin{cases} x' = 5x - 3y - 3z \\ y' = -3x + 5y + 3z + e^t \\ z' = 9x - 9y - 7z. \end{cases}$$

On doit d'abord chercher les solutions générales du système sans second membre

$$(H)\quad \begin{cases} x' = 5x - 3y - 3z \\ y' = -3x + 5y + 3z \\ z' = 9x - 9y - 7z. \end{cases}$$

Le système (H) s'écrit $X' = MX$ où

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 3 \\ 9 & -9 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 5-\lambda & 3 \\ 9 & -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

Toute les solutions de (I) seront de la forme $X(t) = Ae^{-t} + (B + Ct)e^{2t}$ où A, B, C sont des vecteurs-colonnes de $\mathbb{C}^3$. Pour déterminer les vecteurs A, B, C, on injecte cette forme générale des solutions dans l'équation différentielle pour obtenir

$$\begin{aligned} -Ae^{-t} + Ce^{2t} + 2(B + Ct)e^{2t} &= MAe^{-t} + (MB + MCt)e^{2t} \\ -Ae^{-t} + (2B + C)e^{2t} + 2Cte^{2t} &= MAe^{-t} + MBe^{2t} + MCte^{2t} \end{aligned}$$

La famille des fonctions$\left\{t \mapsto t^m e^{\alpha t}\right\}_{m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}}$, étant libre, on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} MA = -A \\ MB = 2B + C \\ MC = 2C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (M+I)\,A = 0 \\ (M-2I)\,B = C \\ (M-2I)\,C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (M+I)\,A = 0 & (1) \\ (M-2I)\,B = C & (2) \\ (M-2I)^2\,B = 0. & (3) \end{array}\right.$$

Il s'agit donc de résoudre (1) et (3), puis de déduire C par (2). On trouve

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1 \\ -3a_1 \end{pmatrix} \quad \text{où } a_1 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} (3) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 9 & -9 & -9 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -9 & 9 & 9 \\ 9 & -9 & -9 \\ -27 & 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } b_1, b_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

puis

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, les solutions du système (H) seront

$$X\,(t) = Ae^{-t} + (B + Ct)\,e^{2t} = \begin{pmatrix} -a_1 e^{-t} + (b_1 + b_2)\,e^{2t} \\ a_1 e^{-t} + b_1 e^{2t} \\ -3a_1 e^{-t} + b_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

où $a_1, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Comme on s'y attendait, l'espace des fonctions solutions de (H) est de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, et une base de cette espace est

$$t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ -3e^{-t} \end{pmatrix}; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Les solutions générales de (E) s'écrivent comme somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution générale de (H). Cherchons donc une solution particulière de

$$X' = MX + Je^{-t} \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Comme -1 est racine d'ordre 1 de $\chi_M(\lambda)$, on sait que cette solution particulière peut être recherchée sous la forme $X = (A + Bt)\, e^{-t}$. En remplaçant dans $(*)$, on trouve

$$\begin{array}{rcl} (B - A - Bt)\, e^{-t} & = & M(A + Bt)\, e^{-t} + Je^{-t} \\ B - A - Bt & = & MA + J + MBt \end{array}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + I)\, A = B - J \\ (M + I)\, B = 0. \end{array} \right.$$

Ce système équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{ll} B = (M + I)\, A + J & (4) \\ (M + I)^2\, A = -(M + I)\, J. & (5) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rl} (5) \quad \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -6 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 18 & -9 & -9 \\ -9 & 18 & 9 \\ 27 & -27 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -\alpha - \frac{1}{3} \\ \alpha \\ -3\alpha - 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Prenons par exemple $A = {}^t(-1/3, 0, -1)$. Alors

$$B = (M + I)\, A + J = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière de (E) sera donc donnée par

$$X = (A + Bt)\, e^{-t} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3} + t\right) e^{-t} \\ -te^{-t} \\ (-1 + 3t)\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

et les solutions générales de (E) seront

$$X = \begin{pmatrix} -a_1 e^{-t} + (b_1 + b_2)\, e^{2t} + \left(t - \frac{1}{3}\right) e^{-t} \\ a_1 e^{-t} + b_1 e^{2t} - t e^{-t} \\ -3a_1 e^{-t} + b_2 e^{2t} + (3t - 1)\, e^{-t} \end{pmatrix}.$$

On notera que la même méthode peut être utilisée pour résoudre une équation dont le second membre est plus compliqué, comme par exemple

$$(E') \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & 5x - 3y - 3z + \cos 2t \\ y' & = & -3x + 5y + 3z + e^{-t} \\ z' & = & 9x - 9y - 7z. \end{array} \right.$$

Comme $\cos 2t = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}$, le système (E') s'écrit

$$X' = MX + Je^{-t} + K + L \quad \text{où } K = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et une solution particulière de (E') sera obtenue en additionnant les solutions particulières de chacune des équations $X' = MX + Je^{-t}$, $X' = MX + K$ et $X' = MX + L$.

5 Equations linéaires d'ordre n à coef. constants

Il s'agit d'équations de la forme

$$(E) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = f(t)$$

où les a_i sont des constantes complexes et où $f(t)$ est une fonctions continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Toute fonction n fois dérivable $x(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant (E) est appelée **solution de l'équation différentielle** (E). Le second membre de (E) est $f(t)$. **L'équation différentielle homogène associée à** (E) (encore appelée **équation sans second membre**) est, par définition, l'équation

$$(H) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = 0.$$

Définition 1 *L'équation $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0$ est appelée* ***équation caractéristique de*** (H).

5.1 Utilisation du système différentiel d'ordre 1 associé

Théorème 11 *1) L'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).*

2) La fonction $x(t)$ est solution de (H) si et seulement si

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} p_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où les λ_i désignent les racines de multiplicité r_i de l'équation caractéristique $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, et où $p_i(t) \in \mathbb{R}[t]$ (ou $\mathbb{C}[t]$) est un polynôme de degré $\deg p_i < r_i$.

3) Le système $\left(t^{s_i} e^{\lambda_i t}\right)_{1 \leq i \leq p, 0 \leq s_i < r_i}$ est une base de S_H.

4) La solution générale de (E) est obtenue en additionnant une solution particulière de (E) et la solution générale de l'équation sans second membre.

5) Il existe une et une seule solutions de (E) satisfaisant les conditions initiales $\left(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)\right) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Preuve : 1) $x(t)$ est solution de (H) si et seulement si

$$X(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = {}^t(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$(H') \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \ldots & & 0 \\ & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}.$$

L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_H & \to & S_{H'} \\ & x(t) & \mapsto & X(t) = {}^t\left(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels de de l'espace S_H des solutions de (H) sur l'espace $S_{H'}$ des solutions de (H'). Par suite $\dim S_H = \dim S_{H'} = n$.

2) Le polynôme caractéristique χ_A de A est

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & & 0 \\ & -\lambda & 1 & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 1 & \\ & & & -\lambda & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0\right).\end{aligned}$$

Cela se montre par récurrence en développant le déterminant suivant la première colonne (on applique l'hypothèse récurrente à la seconde ligne) :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & & 0 \\ & -\lambda & 1 & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 1 & \\ & & & -\lambda & 1 \\ -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} - a_0(-1)^{n-1} \\ &= (-\lambda)(-1)^{n-1}\left(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\right) + a_0(-1)^n \\ &= (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0\right).\end{aligned}$$

On sait que la forme générale des solutions de (H') est $X(t) = \sum_{i=1}^{p} P_i(t)\, e^{\lambda_i t}$ où $P_i(t) \in E[t]$ et où $\deg P_i < r_i$. Compte tenu de l'identification du 1), $x(t)$ aura bien la forme $x(t) = \sum_{i=1}^{p} p_i(t)\, e^{\lambda_i t}$ où $p_i(t) \in \mathbb{R}[t]$ (ou $\mathbb{C}[t]$) et $\deg p_i < r_i$.

3) Le système de n vecteurs $\left(t^{s_i} e^{\lambda_i t}\right)_{1\le i\le p,\ 0\le s_i<r_i}$ engendre l'espace vectoriel S_H des solutions qui est de dimension n d'après 1). C'est donc une base de S_H.

4) Même démonstration qu'au Théorème 9.

5) Se donner la condition $\left(x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)\right) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ revient à imposer la condition initiale $X(t_0) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ à la solution de l'équation du premier ordre $X'(t) = AX(t) + F(t)$, où $F(t)$ désigne le vecteur-colonne ${}^t(0, 0, \dots, f(t))$. Le résultat provient de l'unicité du problème de Cauchy pour l'équation $X'(t) = AX(t) + F(t)$ (Théorème 1). ■

5.2 Autre méthode

Si l'on sait que l'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle

$$(H) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t) = 0$$

est un espace vectoriel de dimension n, on peut montrer directement le résultat suivant (en conservant les notations de la section précédente) :

Théorème 12 *Une base de l'espace S_H est $\mathcal{B} = \left(t^{s_i} e^{\lambda_i t}\right)_{1 \leq i \leq p, 0 \leq s_i < r_i}$.*

Preuve : $\dim S_H = n = \#\mathcal{B}$ de sorte qu'il suffise de montrer que B est un système libre et que chaque $t^{s_i} e^{\lambda_i t}$ est solution de (H).

• Montrons que $t^s e^{\lambda t}$ est bien une solution de (H). Pour cela, supposons que λ soit racine de multiplicité r de l'équation caractéristique, et que $s < r$. Soit L le polynôme $L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$. On pose $a_n = 1$ et l'on définit l'opérateur différentiel

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}.$$

L'équation (H) s'écrit alors $L\left(\frac{d}{dt}\right) x(t) = 0$ et tout revient à montrer le Lemme suivant :

Lemme 3 *Si $p(t)$ est un polynôme et si $\lambda \in K$, alors*

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\left(p(t) e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n} \frac{L^{(i)}(\lambda)}{i!} p^{(i)}(t).$$

Preuve du Lemme :

$$\begin{aligned}
L\left(\frac{d}{dt}\right)\left(p(t) e^{\lambda t}\right) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}\left(p(t) e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} C_i^k p^{(k)}(t) \lambda^{i-k} \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} a_i \frac{p^{(k)}(t)}{k!} \frac{i!}{(i-k)!} \lambda^{i-k} \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(t)}{k!} \sum_{i=k}^{n} a_i \frac{d^k}{dt^k}\left(t^i\right)|_\lambda \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(t)}{k!} \left(\sum_{i=k}^{n} a_i \frac{d^k}{dt^k}\left(t^i\right)\right)|_\lambda \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(t)}{k!} L^{(k)}(\lambda). \blacksquare
\end{aligned}$$

• Le fait que $\mathcal{B}$ est un système libre provient du

Lemme 4 *Si λ_1, ..., λ_n sont n complexes distincts deux à deux et si $p_1(t)$, ..., $p_n(t)$ sont des polynômes de $K[t]$, alors*

$$p_1(t)\, e^{\lambda_1 t} + ... + p_n(t)\, e^{\lambda_n t} = 0 \;\Rightarrow\; p_1(t) = ... = p_n(t) = 0.$$

Preuve du Lemme : Raisonnons par récurrence sur n. C'est trivial si $n = 1$. Au rang n, l'équation $p_1(t)\, e^{\lambda_1 t} + ... + p_n(t)\, e^{\lambda_n t} = 0$ devient

$$p_1(t)\, e^{\mu_1 t} + ... + p_{n-1}(t)\, e^{\mu_{n-1} t} + p_n(t) = 0$$

où les coefficients $\mu_i = \lambda_i - \lambda_n$ sont non nuls et distincts deux à deux. Si $p_n(t)$ est nul, il suffit d'appliquer l'hypothèse récurrente pour conclure. Sinon posons $d = \deg p_n(t)$ et dérivons l'égalité $d + 1$ fois. On obtient

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(p_i(t)\, e^{\mu_i t}\right)^{(d+1)} = 0$$

soit

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{d+1} C_{d+1}^{k} p_i^{(k)}(t)\, \mu_i^{d+1-k} e^{\mu_i t} = 0.$$

L'hypothèse récurrente entraîne $\sum_{k=0}^{d+1} C_{d+1}^{k} p_i^{(k)}(t)\, \mu_i^{d+1-k} = 0$ pour tout i. Si $p_i(t)$ n'était pas le polynôme nul, le système $\left(p_i(t), p_i^{(1)}(t), ..., p_i^{(\deg p_i)}(t)\right)$ serait libre puisque formé de polynômes de degrés étagés, et l'égalité précédente entraînerait $\mu_i^{d+1} = 0$, soit $\mu_i = 0$, ce qui est absurde. On a donc $p_i(t) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, ce qui entraîne aussi $p_n(t) = 0$. La récurrence aboutit. ■

5.3 Second membre de la forme $e^{\mu t} q(t)$

Théorème 13 *Soient $q(t)$ un polynôme de $\mathbb{C}[t]$ et $\mu \in \mathbb{C}$. L'équation différentielle*

$$(E) \qquad x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = q(t)\, e^{\mu t}$$

admet une unique solution de la forme $x \mapsto p(t)\, e^{\mu t}$ où $p(t)$ est un polynôme de valuation $\mathrm{val}(p) = \mathrm{mult}(\mu)$ et de degré $\deg p = \deg q + \mathrm{mult}(\mu)$, où $\mathrm{mult}(\mu)$ désigne la multiplicité de μ dans le polynôme caractéristique de (E).

Preuve : Posons $d = \deg q$, $s = \mathrm{mult}(\mu)$ et $q(t) = q_0 + ... + q_d t^d$. D'après le Lemme 3, il s'agit de trouver un polynôme

$$p(t) = p_s t^s + ... + p_{d+s} t^{d+s} = \sum_{k=s}^{d+s} p_k t^k$$

tel que

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\left(p\left(t\right)e^{\mu t}\right)=e^{\mu t}\sum_{i=0}^{n}\frac{L^{(i)}\left(\mu\right)}{i!}p^{(i)}\left(t\right)=q\left(t\right)e^{\mu t}.$$

Comme $L^{(i)}\left(\mu\right)=0$ pour tout $i<s$, cela équivaut à

$$\sum_{i=s}^{n}\sum_{k=i}^{d+s}\frac{L^{(i)}\left(\mu\right)}{i!}p_k k\left(k-1\right)...\left(k-i+1\right)t^{k-i}=q\left(t\right)$$

$$\sum_{i=s}^{n}\sum_{j=0}^{d+s-i}\frac{L^{(i)}\left(\mu\right)}{i!}p_{i+j}\left(i+j\right)\left(i+j-1\right)...\left(j+1\right)t^{j}=q\left(t\right)$$

$$\sum_{j=0}^{d}\left[\sum_{i=s}^{\inf(d+s,n)}\frac{L^{(i)}\left(\mu\right)}{i!}p_{i+j}\left(i+j\right)\left(i+j-1\right)...\left(j+1\right)\right]t^{j}=q\left(t\right).$$

En fait, dans cette dernière somme, i varie de s à $d+s$. En effet, p étant de degré $\leq d+s$, on a $p_{i+j}=0$ dès que $i+j>d+s$, donc à fortiori si $i>d+s$. Il faut maintenant résoudre

$$\forall j\in\{0,...,d\}\qquad\sum_{i=s}^{d+s}\frac{L^{(i)}\left(\mu\right)}{i!}p_{i+j}\left(i+j\right)\left(i+j-1\right)...\left(j+1\right)=q_j.$$

Ces d équations forment un système triangulaire dont les inconnues sont les p_s, ..., p_{d+s} et dont les coefficients des termes de la diagonale principale sont non nuls (en effet $L^{(s)}\left(\mu\right)\neq 0$ puisque μ est de multiplicité s dans le polynôme $L\left(t\right)$). Ce système est inversible est détermine les p_s, ..., p_{d+s} de façon unique.
■

References

[1] D.-J. Mercier, Réduction des endomorphismes et des matrices carrées, Programme Argumenté du CAPES, Partie XI, (http://perso.wanadoo.fr/megamaths/pac/cred0002.pdf)