Exercice 1 *On considère un échantillon de* 500 *élèves. La taille de ces élèves est approximativement distribuée suivant une loi normale de moyenne* 150 *cm et d'écart-type* 20 *cm.*

1) Quelle est la probabilité pour un élève d'avoir une taille comprise entre 120 *cm et* 145 *cm ?*

2) Quelle est la probabilité pour un élève d'avoir une taille inférieure à 110 *cm ?*

3) En raison de travaux, la hauteur d'une porte habituellement de 200 *cm doit être réduite. De quelle hauteur peut-on la diminuer pour qu'au moins* 400 *élèves puissent la franchir sans se baisser ?*
(Document autorisé : table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$*.)*

Solution :

1) La densité de la loi normale X de moyenne m et d'écart-type σ est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Donc

$$p(X \leq A) = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\frac{A-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

en effectuant le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$ pour nous ramener à la fonction de répartition

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On obtient

$$p(X \leq A) = \Pi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right).$$

Ici $m = 150$, $\sigma = 20$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} p(120 \leq X \leq 145) &= \Pi\left(\frac{145-150}{20}\right) - \Pi\left(\frac{120-150}{20}\right) \\ &= \Pi(-0,25) - \Pi(-1,5) \\ &\simeq 0,401\,3 - 0,066\,8 \simeq 0,334\,5 \end{aligned}$$

[0] [upro0007] v1.00 http ://perso.orange.fr/megamaths/

Exercice n°4 de la 3ème épreuve du concours d'Inspecteur des Impôts 1998.

en utilisant la table des valeurs de $\Pi(t)$.

2) $p(X \leq 110) = \Pi\left(\dfrac{110-150}{20}\right) = \Pi(-2) \simeq 0{,}022\,8$.

3) On réduit la hauteur de la porte de h cm, et on veut que la probabilité qu'un élève mesure moins de $200-h$ cm soit supérieure à 400/500. On résout donc l'inéquation

$$p(X \leq 200-h) \geq \frac{400}{500}. \qquad (*)$$

Comme

$$p(X \leq 200-h) = \Pi\left(\frac{200-h-150}{20}\right) = \Pi\left(\frac{5}{2}-\frac{h}{20}\right),$$

l'inéquation s'écrit $\Pi\left(\frac{5}{2}-\frac{h}{20}\right) \geq 0{,}8$. La fonction Π est croissante, et un coup d'oeil sur la table montre que $\Pi(0{,}84) \simeq 0{,}799\,5$ et $\Pi(0{,}85) \simeq 0{,}802\,3$. On peut donc affirmer que $(*)$ est vérifiée dès que

$$\frac{5}{2}-\frac{h}{20} \geq 0{,}85$$

c'est-à-dire $h \leq 33$. On peut diminuer la hauteur de la porte de 33 cm.