Exercice 1 *(Ecrit du concours Inspecteur-élève analyste des Impôts 2009) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient $\mathcal{L}_2$ (resp. $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{A}_2$) l'espace des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques, bilinéaires antisymétriques) sur E.*

a) Montrer que $\mathcal{L}_2 = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2$.

b) Déterminer les dimensions de $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{A}_2$ en fonction de n.

Solution : a) Il s'agit de montrer que toute forme bilinéaire[1] $\varphi \in \mathcal{L}_2$ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi = \psi + \xi$ où $\psi \in \mathcal{S}_2$ et $\xi \in \mathcal{A}_2$.

Analyse : Si cette décomposition existe, alors pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \psi(x,y) + \xi(x,y) \\ \varphi(y,x) = \psi(x,y) - \xi(x,y) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \psi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x)) \\ \xi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi(y,x)). \end{cases} \quad (*)$$

Le système $(*)$ détermine parfaitement ψ et ξ. L'unicité de ψ et ξ est acquise sous la condition qu'elles existent.

Synthèse : Les applications ψ et ξ définies par $(*)$ sont bien des formes bilinéaires (comme combinaisons linéaires de formes bilinéaires) et l'on a bien $\psi(y,x) = \psi(x,y)$ et $\xi(y,x) = -\xi(x,y)$ pour tous x, y, donc $\psi \in \mathcal{S}_2$ et $\xi \in \mathcal{A}_2$.

b) • Se donner une forme bilinéaire $\varphi \in \mathcal{L}_2$ revient à se donner sa matrice M dans une base $e = (e_1, ..., e_n)$ (fixée une fois pour toutes). M est une matrice carrée de taille n, donc s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} E_{ij}$$

où $E_{ij} = (\delta_{ij})$ représente la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui situé à la i-ème ligne et j-ième colonne qui vaut 1. Il est facile de voir

[1] Rappelons que, si E est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, une forme bilinéaire φ sur E est une application de $E \times E$ dans K linéaire en chacune des variables. Rappelons aussi que φ est dite *symétrique* si pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, *antisymétrique* si pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$, et *alternée* si pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) = 0$. Si K est de caractéristique différente de 2, on montre facilement que φ est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

que $(E_{11}, E_{12}, ...E_{nn})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, donc $\dim \mathcal{L}_2 = \dim \mathcal{M} = n^2$.

• Une forme bilinéaire $\psi \in \mathcal{L}_2$ est symétrique si et seulement si sa matrice $M = (a_{ij})$ est symétrique. Cela signifie que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j, ou encore que ses coefficients sont égaux dès ils sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

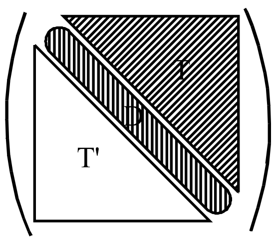

Figure 1: Matrice symétrique

Sur la FIG. 1, les seuls coefficients que l'on peut choisir librement seront ceux du triangle supérieur T et ceux de la diagonale principale D, puisque les coefficients du triangle inférieur T' sont égaux à ceux de T. On dénombre $\frac{n^2-n}{2}$ coefficients dans T, et n coefficients dans D, donc la matrice M aura

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

degrés de libertés, et $\dim \mathcal{S}_2 = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Une façon plus rigoureuse de procéder consiste à noter qu'une matrice symétrique s'écrit toujours de façon unique sous la forme

$$M = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}),$$

et donc que la famille de vecteurs $\{E_{11}, ..., E_{nn}\} \cup \{E_{ij} + E_{ji}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ forme une base de l'espace des matrices symétriques. La dimension de cet espace est égale au nombre de vecteurs de cette base, soit $n\,(n+1)\,/2$.

• On recommence de la même façon : une forme bilinéaire ξ est antisymétrique si et seulement si sa matrice $M = (a_{ij})$ est antisymétrique. Cela signifie que $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous i, j, et qu'en particulier les coefficients de la diagonale principale sont nuls.

Lorsqu'on partage M en trois zones comme sur la FIG. 1, on constate que les coefficients de T' dépendent des coefficients de T, et que tous les coefficients de D sont nuls. La matrice M possède donc autant de degrés de liberté que de coefficients dans T, c'est-à-dire $\left(n^2 - n\right)/2$.
Donc $\dim \mathcal{A}_2 = \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$.

Remarque : On a bien évidemment $\dim \mathcal{L}_2 = \dim \mathcal{S}_2 + \dim \mathcal{A}_2$ puisque $\mathcal{L}_2 = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2$.