Inspecteurs des impôts 2007

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : `jeaneric.richard(a)wanadoo.fr` (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 5 octobre 2009 à 16h14.

✻ Ex.1 ―――――― *I.*

On considère la fonction h de la variable numérique x définie par :

$$h(x) = x - 1 - \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$\boxed{1.}$ a) Étudier les variations de h, dresser son tableau de variations, tracer sa courbes représentative.

b) En déduire une majoration de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+^*}$.

$\boxed{2.}$ Démontrer que si $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

―――― Corrigé de l'exercice 1 ――――

$\boxed{1.}$ a) La fonction h est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme des fonctions $x \mapsto x-1$ affine (de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car fonction affine) et de $x \mapsto -\ln(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, fonction logarithme népérien).

On a pour tout $x > 0$, $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$ le signe de $h'(x)$ est donné par celui de $x - 1$:

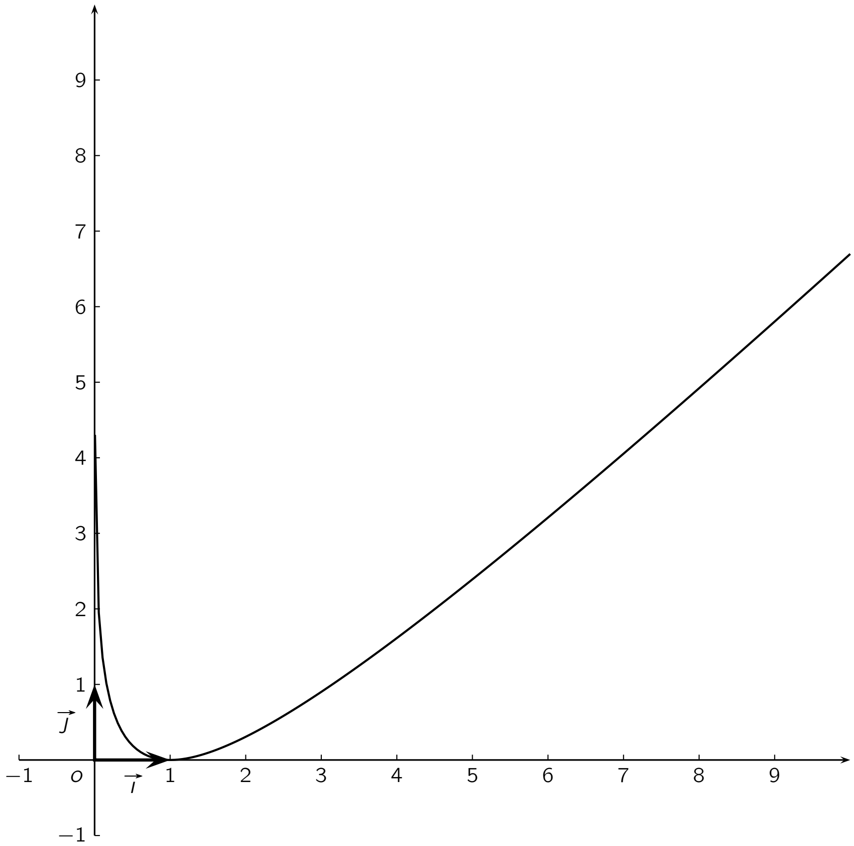
- sur l'intervalle $]0\,;1[$, h est strictement décroissante ;
- sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, h est strictement croissante.

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0 - \ln(x) = +\infty$.

Et comme $h(x) = x \times \left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Le tableau de variation de h est donc le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



b) Comme $h(1) = 0$ et est le minimum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :
pour tout $x > 0$, $h(x) \geqslant h(0)$, c'est à dire $\forall x > 0$, $\boxed{x - 1 \geqslant \ln(x)}$

$\boxed{2.}$ On suppose chaque $a_i > 0$: pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i - 1 \geqslant \ln(a_i)$.

L'idée consiste à prendre, pour tout $n \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \dfrac{nx_i}{x_1 + \cdots + x_n}$ (on prend d'ailleurs chaque $x_i > 0$) :
on a $a_i - 1 \geqslant \ln(a_i)$ qui s'écrit, $\dfrac{nx_i}{x_1 + \cdots + x_n} - 1 \geqslant \ln\left(\dfrac{nx_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\right)$.
Par somme des inégalités pour i allant de 1 à n :

$$\frac{n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{x_1 + \cdots + x_n} - n = n - n = 0 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{nx_i}{x_1 + \cdots + x_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

soit encore :

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

car la fonction ln est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
De plus si l'un des x_i est nul l'inégalité est encore vraie.