Concours nationaux
Inspecteur-élève généraliste (externes)
– à affectation Île-de-France
– à affectation nationale

J. 6001174-A

ANNÉE 2007

ÉPREUVE N° 2

DURÉE : 3 heures. – COEFFICIENT : 5

DOSSIER COMPRENANT :

- 1 fascicule de 12 pages;
- 11 documents répartis en 30 feuillets (note de synthèse);
- 1 annexe (gestion comptable).

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie informatisée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne devra porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

MATHÉMATIQUES

Code matière 030

L'usage des calculatrices est autorisé

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

-I-

On considère la fonction h de la variable numérique x définie par :

$$h(x) = x - 1 - \ln(x)$$

On note $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. (a) Étudier les variations de h, dresser son tableau de variation, puis tracer son graphe $\mathscr{C}_h$.
   (b) En déduire une majoration de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Démontrer que si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

-II-

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3 + \cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et justifier la continuité de f sur cet ensemble. En déduire que f admet des primitives sur tout intervalle fermé et borné de $\mathcal{D}$.
2. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, déterminer l'ensemble $\mathscr{F}_{[0,\alpha]}$ des primitives de f sur $[0, \alpha]$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}_{[0,2\pi]}$ des primitives de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Notons $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$−espace vectoriel des fonctions numériques définies, continue, intégrables et de carrés intégrables sur[1] un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

$$\mathscr{E} = \left\{ f \in C^0(I,\mathbb{R}) \mid \int_I |f(t)|\, dt < +\infty \text{ et } \int_I f(t)^2\, dt < +\infty \right\}$$

On notera $\mathscr{E}^*$, l'ensemble $\mathscr{E}$ privé de la fonction identiquement nulle.

A– Produit scalaire

A-1. Démontrer[2] que pour tout couple $(f,g) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$ l'intégrale $\int_I |f(t)g(t)|\, dt$ est finie.

En déduire que l'application $\varphi : (f,g) \to \int_I f(t)g(t)\, dt$ est définie sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$.

A-2. Démontrer que φ est bilinéaire, symétrique.

A-3. Démontrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$ on a $\varphi(f,f) \geq 0$.
Démontrer que $\varphi(f,f) = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle.

A-4. Soit $(f,g) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$.
Montrer que $P : \lambda \in \mathbb{R} \to P(\lambda) = \varphi(\lambda f + g, \lambda f + g)$ est un trinôme.
Déterminer le signe de ce trinôme et en déduire que :

$$\varphi(f,g)^2 \leq \varphi(f,f)\varphi(g,g)$$

Démontrer qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.
Prouver que :

$$\varphi(f+g, f+g) \leq \left(\sqrt{\varphi(f,f)} + \sqrt{\varphi(g,g)}\right)^2$$

B– Géométrie

Toutes les fonctions considérées sont des éléments de $\mathscr{E}$ et pour alléger les notations on pose :

$$q(f) = \varphi(f,f) \quad \text{et} \quad \|f\| = \sqrt{q(f)} = \sqrt{\varphi(f,f)}$$

B-1. Démontrer que :

$$\varphi(f,g) = 0 \iff \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

On dit alors que f et g sont orthogonales.

B-2. Démontrer que :

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

Que peut-on en déduire si f et g sont orthogonales ?
Quelle analogie avec la géométrie euclidienne du plan $\mathbb{R}^2$ peut-on faire ?

B-3. On suppose que $I = [0,1]$ et on considère $f \in \mathscr{E}^*$ une fonction non constante.
On considère le sous-espace vectoriel V engendré par f et la fonction $\mathbb{1}$ définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad \mathbb{1}(t) = 1$$

Démontrer pour tout $g \in \mathscr{E} \backslash V$ il existe un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall h \in V \quad \varphi(g - \lambda f - \mu \mathbb{1}, h) = 0$$

Déterminer λ et μ. On pose $\pi_V(g) = \lambda f + \mu$.
En utilisant une analogie avec la géométrie euclidienne du plan, que peut-on dire de $\pi_V(g)$?

B-4. En utilisant les notations de la question précédente démontrer que pour toute $h \in V \backslash \{\pi_V(g)\}$ on a :

$$\|g - \pi_V(g)\| < \|g - h\|$$

---

[1] Si I est un intervalle de borne inférieure a et de borne supérieure b on a $\int_I u(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt$

[2] **Indication** : on pourra utiliser la deuxième égalité remarquable.