Concours "Inspecteur des Impôts" session 2006

Epreuve 3 : Mathématiques & Statistiques

Solution proposée par Dany-Jack Mercier

Concours nationaux : Inspecteur-élève généraliste (internes et externes)

- à affectation régionale Ile-de-France
- à affectation nationale

http ://megamaths.perso.neuf.fr/

[0] [inspecteurimpots2006ep3s] v1.00 ufon0012 umat0011 usta0001 upro0005

© 2006, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel

[1]

Partie I

1.a) Par définition $E(x) \leq x < E(x)+1$. Si x n'est pas entier, les deux points d'abscisses entières les plus proches de M sont donc les points $A_{E(x)}$ et $A_{E(x)+1}$ d'abscisses respectives $E(x)$ et $E(x)+1$. Les distances de M à $A_{E(x)}$ et $A_{E(x)+1}$ étant $MA_{E(x)} = x - E(x)$ et $MA_{E(x)+1} = (E(x)+1) - x$, on obtient

$$f(x) = (x - E(x))(E(x)+1-x). \quad (*)$$

Si x est entier, il n'existe qu'un seul point d'abscisse entière le plus proche de M : c'est M lui-même. Quel que soit le second point d'abscisse entière que l'on choisisse (abscisse $x+1$ ou $x-1$), on obtient $f(x) = 0$, et la formule $(*)$ reste vraie dans ce cas.

1.b) La fonction partie entière est 1-périodique, donc pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1-E(x+1))(E(x+1)+1-(x+1)) \\ &= (x-E(x))(E(x)+1-x) = f(x), \end{aligned}$$

et f est 1-périodique.

Remarques : α) La périodicité de $E(x)$ provient de l'implication

$$E(x) \leq x < E(x)+1 \quad \Rightarrow \quad E(x)+1 \leq x+1 < E(x)+2$$

qui donne $E(x+1) = E(x)+1$.

β) Une solution plus longue mais néanmoins intéressante consiste à utiliser une translation. L'égalité $f(x+1) = f(x)$ est évidente si x est entier, puisque dans ce cas $M = A_x$, $f(x) = 0$, et comme $x+1$ est entier, le point N d'abscisse $x+1$ sera égal à A_{x+1}, et l'on aura encore $f(x+1) = 0 = f(x)$.
Si x n'est pas entier, notons A_p et A_{p+1} les points d'abscisses entières les plus proches de M (on a $p = E(x)$). Par définition : $f(x) = MA_p \times MA_{p+1}$.
Le point N d'abscisse $x+1$ est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{i}}$ de vecteur $\overrightarrow{i}$. Cette translation amène aussi A_p sur A_{p+1}, et A_{p+1} sur A_{p+2}. Comme elle conserve les distances, $MA_p = NA_{p+1}$ et $MA_{p+1} = NA_{p+2}$, et l'on obtient bien

$$f(x) = MA_p \times MA_{p+1} = NA_{p+1} \times NA_{p+2} = f(x+1).$$

1.c) Il suffit d'étudier f sur $[0,1[$ pour la connaître sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\forall x \in [0,1[\qquad f(x) = x(1-x) = -x^2 + x.$$

[1] © 2006, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel

f est donc dérivable (et donc continue) sur $]0,1[$, et aussi sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Sur cet intervalle, sa représentation graphique est un morceau de parabole tournant sa concavité vers le bas.
Si $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x \in [p, p+1[\Rightarrow f(x) = (x-p)(p+1-x) \\ x \in [p-1, p[\Rightarrow f(x) = (x-p+1)(p-x). \end{cases}$$

Ainsi $\lim_{x\to p_+} f(x) = 0 = f(p) = \lim_{x\to p_-} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en p. Calculons les limites des taux d'accroissement à droite et à gauche en p :

$$\lim_{x\to p_+, x\neq 0} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_+} \frac{(x-p)(p+1-x)}{x-p} = \lim_{x\to p_+} (p+1-x) = 1$$

et

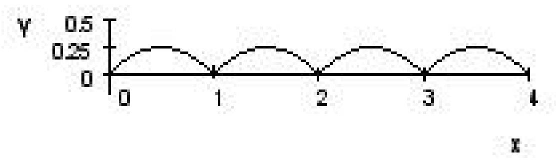
$$\lim_{x\to p_-, x\neq 0} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_-} \frac{(x-p+1)(p-x)}{x-p} = \lim_{x\to p_-} (-x+p-1) = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en p, mais admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en ce point (et la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche en p).

1.d) Pour $x \in [0,1[$, $f'(x) = -2x+1$, donc f s'annule en $1/2$ et :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1(limite à gauche)
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

1.e)



2.a) Si $x \in [p, p+1[$, $g(x) = E(x+1)\, f(x) = (p+1)\,(x-p)(p+1-x)$.

2.b) Sur chaque intervalle $[p, p+1[$, la fonction g étant le produit de f par la constante $p+1$, et f étant dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on peut affirmer que g est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
En reprenant les calculs du 1.c),

$$\lim_{x\to p_+, x\neq 0} \frac{g(x) - g(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_+} \frac{(p+1)\,(x-p)(p+1-x)}{x-p} = p+1$$

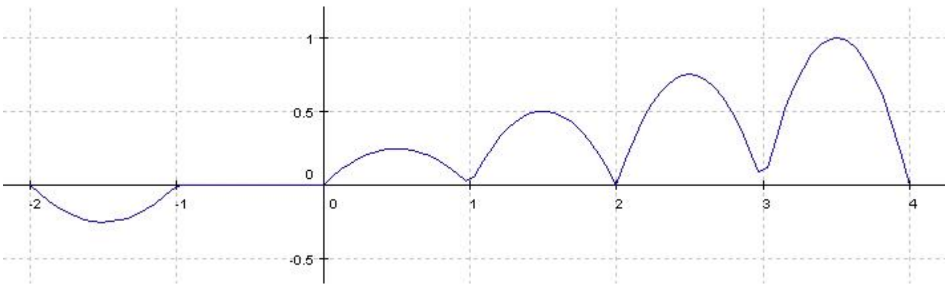
et

$$\lim_{x\to p_-, x\neq 0} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = \lim_{x\to p_-} \frac{p(x-p+1)(p-x)}{x-p} = -p.$$

Ainsi g est dérivable en p si et seulement si $p+1=-p$, i.e. $p=1/2$, valeur à rejeter car non entière. En conclusion g n'est dérivable en aucun point entier.

Remarque : Le tableau de variation de g se déduit de celui de f sur chacun des intervalles $[p, p+1[$: même sens de variation si $p+1>0$, sens de variation différents si $p+1<0$.

2.c) Le lecteur construira la courbe $\mathcal{C}_g$ dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un grapheur nous donne l'allure suivante (en laissant une imperfection en $x=3$) :



2.d)

$$\mathcal{A}_p = \int_p^{p+1} g(x)\; dx = (p+1)\int_p^{p+1} (x-p)(p+1-x)\, dx$$

En faisant le changement de variables $t = x-p$,

$$\mathcal{A}_p = (p+1)\int_0^1 t(1-t)\, dt = (p+1)\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{p+1}{6}.$$

2.e) Il faut calculer $S_n = \frac{1}{6}\sum_{p=0}^{n}(p+1)$. On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression arithmétique de raison 1 et de premier terme 1. D'où

$$S_n = \frac{1}{6}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{12}.$$

Partie II

1) La matrice

$$A - kaI_n = \begin{pmatrix} a-ka & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2a-ka & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na-ka \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure. Son déterminant est donc égal au produit de tous les coefficients situés sur la diagonale principale :

$$\begin{aligned} \det(A - kaI_n) &= (a-ka)(2a-ka)\ldots(na-ka) \\ &= (1-k)(2-k)\ldots(n-k)\,a^n. \end{aligned}$$

Comme k est un entier compris entre 1 et n, l'un des termes du produit est nul, et $\det(A - kaI_n) = 0$.

2) • Calculer P^{-1} revient à résoudre le système triangulaire (S) suivant d'inconnues x_1, ..., x_n et de paramètres m_1, ..., m_n :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = m_1 \\ \quad x_2 + \ldots + x_n & = m_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots & = \ \ldots \\ \quad\quad x_{n-1} + x_n & = m_{n-1} \\ \quad\quad\quad x_n & = m_n. \end{cases}$$

On procède de proche en proche.
D'abord $x_n = m_n$, puis $x_{n-1} = m_{n-1} - x_n = m_{n-1} - m_n$, puis encore

$$x_{n-2} = m_{n-2} - (x_{n-1} + x_n) = m_{n-2} - m_{n-1}.$$

Il est fort probable que l'on ait $x_{n-k} = m_{n-k} - m_{n-k+1}$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, et où l'on pose commodément $m_{n+1} = 0$. Vérifions donc que la propriété

$$H(k): \quad x_{n-k} = m_{n-k} - m_{n-k+1}$$

est vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ en raisonnant par récurrence sur k. La propriété $H(0)$ est triviale. Si l'on suppose les propriétés $H(0)$, $H(1)$, ..., $H(k)$ toutes vraies jusqu'au rang k, on obtient au rang $k+1$:

$$x_{n-k-1} + x_{n-k} + \ldots + x_n = m_{n-k-1}$$

soit $x_{n-k-1} = m_{n-k-1} - (x_{n-k} + ... + x_n)$. Comme

$$\begin{aligned} x_{n-k} + ... + x_n = \sum_{i=0}^{k} x_{n-i} &= \sum_{i=0}^{k} (m_{n-i} - m_{n-i+1}) \\ &= m_n + (m_{n-1} - m_n) + ... + (m_{n-k} - m_{n-k+1}) \\ &= m_{n-k}, \end{aligned}$$

on obtient bien $x_{n-k-1} = m_{n-k-1} - m_{n-k}$, et la récurrence aboutit. Finalement

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & 2a & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 2a & \cdots & \cdots & na \\ 0 & 2a & 3a & \cdots & na \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)a & na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2a & \cdots & \cdots & na \\ 0 & 2a & 3a & \cdots & na \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)a & na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & na \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P^{-1}AP = \Delta$ où Δ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux (sur la diagonale principale) sont a, $2a$, ..., na.

Remarques : α) Travailler avec des matrices de taille n nous oblige à mettre de nombreux points de suspension. On peut vérifier que les calculs précédents sont bien justes lorsque $n = 3$, par exemple. On obtient :

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AP = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 2a & 3a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix},$$

et enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 2a & 3a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}.$$

β) Il n'est pas facile de calculer ces produits de matrices "directement". Une autre solution, plus lourde mais très efficace, consiste à écrire in extenso les coefficients des matrices que l'on doit calculer, à l'aide de sommes. Un exemple de tel travail est donné dans la réponse à la question 3), pour le calcul de $A^p = P\Delta^p P^{-1}$.

γ) La matrice diagonale Δ ne peut être que celle que l'on a trouvé ! Pour le voir, il faut rappeler le résultat de cours suivant :

Théorème : Une matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet n valeurs propres réelles distinctes λ_1, ..., λ_n, est diagonalisable, autrement dit il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, où l'on pose

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La question 1) montre que notre matrice A admet les n réels distincts a, $2a$, ..., na pour valeurs propres. On peut donc affirmer l'existence d'une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(a, 2a, ..., na)$. Quant à savoir qui est P, le théorème ne nous le dit pas...Il faudrait chercher une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A...

3) Si $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^p = \left(P\Delta P^{-1}\right)^p &= \left(P\Delta P^{-1}\right)\left(P\Delta P^{-1}\right)...\left(P\Delta P^{-1}\right) \\ &= P\Delta\left(P^{-1}P\right)\Delta\left(P^{-1}P\right)...\Delta\left(P^{-1}P\right)\Delta P^{-1} \\ &= P\Delta^p P^{-1}. \end{aligned}$$

Le calcul de Δ^p est facile :

$$\Delta^p = \begin{pmatrix} a^p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & (2a)^p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ((n-1)a)^p & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (na)^p \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite $A^p = P\Delta^p P^{-1}$. La multiplication n'étant pas aisée à faire, nous emploierons les grands moyens. Notons

$$\Delta^p = (d_{ij}) \ ; \quad P = (p_{ij}) \ ; \quad P^{-1} = (q_{ij})$$

avec

$$d_{ij} = (ia)^p \, \delta_{ij} \ ; \quad p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ ; \quad q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker (par dféfinition δ_{ij} vaut 1 si $i = j$, et 0 dans le cas contraire). Dans ce cas, on a $\Delta^p P^{-1} = (a_{ij})$ avec

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} q_{kj} = d_{ii} q_{ij} = (ia)^p \, q_{ij} = \begin{cases} (ia)^p & \text{si } i = j \\ -(ia)^p & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis $A^p = P\Delta^p P^{-1} = P\left(\Delta^p P^{-1}\right) = (p_{ij})\,(a_{ij}) := (b_{ij})$ avec

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} a_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{kj} = \begin{cases} a_{j-1,j} + a_{jj} & \text{si } i < j \\ a_{jj} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ainsi

$$b_{ij} = \begin{cases} -\left(\left(j-1\right)a\right)^p + (ja)^p & \text{si } i < j \\ \quad (ja)^p & \text{si } i = j \\ \quad 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

La matrice cherchée A^p est de terme général b_{ij} obtenu ci-dessus.

Remarques, conseils et méthodologie :

α) Pour calculer A^p, nous avons utilisé la définition classique d'un produit de matrice. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices carrées de taille n dont les coefficients généraux sont a_{ij} et b_{ij}, pour $i =$ indice de ligne et $j =$ indice de colonne, le produit de A par B, noté AB ou $A \times B$, est la matrice $C = (c_{ij})$ de terme général

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

La formule est à retenir ! Elle signifie que l'on obtient le coefficient c_{ij}, situé à la i -ème ligne et j-ième colonne, en "multipliant la i -ème ligne de A par la j-ième colonne de B". Le produit matriciel s'effectue donc en "multipliant des lignes par des colonnes" (c'est une façon de parler qui permet de bien retenir la formule !).

β) **Conseil stratégique pour le concours** : A-t-on vraiment le temps de proposer cette solution durant une épreuve en temps limité ? Ce n'est pas sûr :

Tout dépend de son entraînement sur les matrices ET des points que l'on peut gagner en traitant en priorité les autres questions.

Je pense que beaucoup de candidats ont été bloqués par cet exercice de calcul matriciel, mais ont tout de même réussi l'épreuve en traitant les autres exercices du sujet.
Bref : on fera attention à ne pas rester bloqué longtemps sur une question (plus de cinq minutes, si l'on ne trouve pas de méthode probable de résolution) ... circulez, gagnez des points à chaque instant et là où vous les trouvez, quitte à revenir sur les questions restantes à la fin de l'épreuve après être certain d'avoir engrangé tous les points qui étaient réellement à portée.
Il faut surtout ne jamais sortir de l'épreuve en lisant la suite du problème, et en s'écriant par exemple : "Mais j'aurais pu répondre facilement à cette question... au lieu d'être bloqué à tel endroit pendant plus d'une demi-heure !".

γ) Vérifions la justesse de la formule donnant A^p en traitant "à la main" le cas où $p = 3$. On a

$$\Delta^p P^{-1} = \begin{pmatrix} a^p & 0 & 0 \\ 0 & (2a)^p & 0 \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^p & -a^p & 0 \\ 0 & (2a)^p & -(2a)^p \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} A^p = P\left(\Delta^p P^{-1}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^p & -a^p & 0 \\ 0 & (2a)^p & -(2a)^p \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & -a^p + (2a)^p & -(2a)^p + (3a)^p \\ 0 & (2a)^p & -(2a)^p + (3a)^p \\ 0 & 0 & (3a)^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4) Comme $a \in]0,1]$, $\lim_{p\to+\infty} a^p = 0$ si $0 < a < 1$, et $\lim_{p\to+\infty} a^p = 1$ si $a = 1$. Mais il y a un problème : les coefficients b_{ij} de A^p s'expriment en fonction de $(ja)^p$ avec $1 \leq j \leq n$.
Admettons que chercher la limite de A^p revienne à chercher la limite de Δ^p (cela peut se prouver rigoureusement en utilisant la continuité de l'application $M \mapsto P^{-1}MP$). Dans ce cas, $\lim_{p\to+\infty} A^p$ existe si et seulement si les limites $\lim_{p\to+\infty} (ja)^p$ existent pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$. Cela revient à dire que

$$\forall j \in \{1, ..., n\} \quad ja \leq 1$$

c'est-à-dire $a \leq \dfrac{1}{n}$. Dans ce cas, la limite de A^p est $L = (l_{ij})$ avec

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} \quad l_{ij} = \lim_{p\to+\infty} (b_{ij})$$

Compte tenu de

$$b_{ij} = \begin{cases} -\left((j-1)\,a\right)^p + (ja)^p & \text{si } i < j \\ (ja)^p & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

on obtient :

$$i > j \quad \Rightarrow \quad l_{ij} = 0$$

$$\forall j \in \{1, ..., n-1\} \quad l_{jj} = 0$$

$$l_{nn} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1/n \\ 1 & \text{si } a = 1/n \end{cases}$$

$$i<j<n \quad \Rightarrow \quad l_{ij}=0$$

$$i<j=n \quad \Rightarrow \quad l_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{si } a<1/n \\ 1 & \text{si } a=1/n. \end{cases}$$

En conclusion :

▶ Si $1/n < a \leq 1$, la suite (A^p) n'admet pas de limite quand p tend vers l'infini.

▶ Si $0 < a < 1/n$, A^p tend vers la matrice nulle.

▶ Si $a = 1/n$, A^p tend vers

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III

1) L'effectif total est $N = 229+325+257+119+50+17+2+1+0 = 1000$, et $m=\sum_{i=1}^{8}\frac{n_i}{N}x_i$. On obtient

$$\begin{aligned} m &= 0,229\times 0+0,325\times 1+0,257\times 2+0,119\times 3+0,050\times 4 \\ &\qquad +0,017\times 5+0,002\times 6+0,001\times 7, \end{aligned}$$

soit $m = 1,5$.

2) Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) lorsque sa loi de probabilité est

$$p\,(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$. On sait que l'espérance $E\,(X)$, la variance $V\,(X)$ et l'écart-type $\sigma\,(X)$ d'une loi de Poisson de paramètre λ sont $E\,(X)=V\,(X)=\lambda$ et $\sigma\,(X)=\sqrt{\lambda}$. Considérons une distribution de Poisson de paramètre la moyenne $m = 3/2$ obtenue au 1). On obtient les probabilités

$$p_k=p\,(X=k)=e^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{k!}\left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

En considérant un échantillon de taille $N = 1000$, le tableau des effectifs théoriques pour la loi de Poisson de paramètre $m = 1,5$ est (approximativement) :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
e_i	223	334	251	125	47	14	$3,5$	$0,8$	$0,1$

où $e_i = p_i \times N$. Ce tableau ressemble beaucoup à celui de l'énoncé. La distribution proposée est donc proche de celle d'une loi de Poisson.

3) Par définition

$$V = \sum_{i=1}^{8} \frac{n_i}{N} (x_i - m)^2 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{V},$$

donc

$$\begin{aligned} V = {} & 0,229 \times (0-1,5)^2 + 0,325 \times (1-1,5)^2 + 0,257 \times (2-1,5)^2 \\ & +0,119 \times (3-1,5)^2 + 0,050 \times (4-1,5)^2 + 0,017 \times (5-1,5)^2 \\ & +0,002 \times (6-1,5)^2 + 0,001 \times (7-1,5)^2 \\ = {} & 1,52 \ ; \end{aligned}$$

puis $\sigma = \sqrt{1.52} \simeq 1,2329$.
L'écart-type de la loi de Poisson de paramètre $m = 1,5$ étant $\sqrt{1,5} \simeq 1,2247$.
Les deux distributions sont donc très proches l'une de l'autre.

Partie IV

1) La probabilité p_1 de jeter un seul dé est égale à la somme $p_B + p_R$ où p_B désigne la probabilité de tirer 3 boules blanches, et p_R celle de tirer 3 boules rouges.
Si E_k désigne l'événement "Tirer une boule blanche au k-ième tirage", on obtient (en termes de probabilités conditionnelles) :

$$\begin{aligned} p_B &= p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= p(E_3 / (E_1 \cap E_2)) \times p(E_2/E_1) \times p(E_1) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}, \end{aligned}$$

puisque la probabilité de tirer une blanche est de :

▷ 3/10 au 1er tirage, l'urne contient alors 2 blanches et 7 rouges,

▷ 2/9 au 2nd tirage (sachant que l'on a tiré une blanche au 1er tirage), l'urne contient alors une blanche et 7 rouges,

▷ 1/8 au 3ème tirage (sachant que l'on a tiré des blanches aux 1er et 2nd tirages).

De la même façon,

$$p_R = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{21}{100},$$

puisque la probabilité de tirer une rouge est de :

▷ 7/10 au 1er tirage, l'urne contient alors 4 blanches et 6 rouges,

▷ 6/10 au 2nd tirage (sachant que l'on a tiré une rouge au 1er tirage), l'urne contient alors 5 blanches et 5 rouges,

▷ 5/10 au 3ème tirage (sachant que l'on a tiré des rouges aux 1er et 2nd tirages).

En conclusion :

$$p_1 = p_B + p_R = \frac{1}{120} + \frac{21}{100} = \frac{131}{600} \simeq 0,22.$$

2) Soient p_4 la probabilité d'obtenir un 4, et p_2 la probabilité de jeter 2 dés. On a

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{131}{600} = \frac{469}{600}.$$

Les formules des probabilités totales et des probabilités conditionnelles donnent :

$$\begin{aligned} p_4 &= p\left((\text{obtenir } 4) \cap (\text{jeter } 1 \text{ dé})\right) + p\left((\text{obtenir } 4) \cap (\text{jeter } 2 \text{ dés})\right) \\ &= p\left((\text{obtenir } 4) \,/\, (\text{jeter } 1 \text{ dé})\right) \times p_1 + p\left((\text{obtenir } 4) \,/\, (\text{jeter } 2 \text{ dés})\right) \times p_2. \end{aligned}$$

Bien entendu $p\left((\text{obtenir } 4) \,/\, (\text{jeter } 1 \text{ dé})\right) = 1/6$. Cela étant, il y a 3 façons d'obtenir 4 en jetant 2 dés : si (x, y) désigne l'événement élémentaire "obtenir x points au premier lancer, puis y points au second", nous obtenons 4 lors des trois issues $(1, 3)$, $(2, 2)$ ou $(3, 1)$. Comme on dénombre 36 événements élémentaires possibles,

$$p\left((\text{obtenir } 4) \,/\, (\text{jeter } 2 \text{ dés})\right) = \frac{3}{36}.$$

En remplaçant :

$$p_4 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{3}{36}p_2 = \frac{1}{6} \times \frac{131}{600} + \frac{3}{36} \times \frac{469}{600} = \frac{731}{7200} \simeq 0,1015.$$

3) En raisonnant comme au 2), on trouve que la probabilité cherchée est

$$p_p = p\left(\begin{pmatrix} \text{obtenir} \\ \text{nbre pair} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \text{jeter} \\ 1 \text{ dé} \end{pmatrix}\right) \times p_1 + p\left(\begin{pmatrix} \text{obtenir} \\ \text{nbre pair} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \text{jeter} \\ 2 \text{ dés} \end{pmatrix}\right) \times p_2.$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair en jetant un dé est 1/2.

Si l'on jette 2 dés, on obtient un nombre pair si et seulement si l'on est dans l'un des 18 cas favorables suivants (sur 36 cas possibles) :

	2	4	6	8	10	12
	$(1,1)$	$(1,3)$	$(1,5)$	$(2,6)$	$(4,6)$	$(6,6)$
		$(2,2)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(5,5)$	
		$(3,1)$	$(3,3)$	$(4,4)$	$(6,4)$	
			$(4,2)$	$(5,3)$		
			$(5,1)$	$(6,2)$		

La probabilité d'obtenir un nombre pair en jetant deux dés est donc 18/36, soit 1/2. Finalement

$$p_p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}(1 - p_1) = \frac{1}{2}.$$

Après tous ces tirages et le jeté de dés, nous avons exactement une chance sur deux d'obtenir un nombre pair !