MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

I

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on nomme Γ_1 et Γ_2 les courbes planes paramétrées représentatives des systèmes de coordonnées suivants :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2t} \\ y = \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t} \end{cases}.$$

I.1. Montrer que Γ_1 se déduit aisément de Γ_2 par une transformation simple du plan que l'on précisera.

I.2. Dans toute la suite, on se limite alors à l'étude de Γ_2 et l'on désigne par $M(t)$ le point courant de Γ_2 de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

I.2.a. Préciser le domaine de définition D du point $M(t)$.

I.2.b. Montrer que pour $t \neq -\dfrac{1}{2}$ et $t \neq 1$, le point $M(t)$ est un point ordinaire de la courbe Γ_2 tel que $\det\left(\overrightarrow{OM'(t)}, \overrightarrow{OM''(t)}\right) \neq 0$.

I.2.c. Préciser la nature des points $M\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $M(1)$ ainsi que la valeur de la tangente à Γ_2 en ces points.

I.2.d. Rechercher les points de Γ_2 à tangente verticale.

I.2.e. Montrer que Γ_2 coupe l'axe des abscisses en un point que l'on précisera et qu'elle ne coupe jamais l'axe des ordonnées.

I.3. On note $m(t)$ la pente de la tangente à Γ_2 au point $M(t)$.

I.3.a. Établir l'expression de $m(t)$.

I.3.b. Montrer alors que la quantité $\dfrac{d^2y}{d^2x}$ est du signe de $x'(t)m'(t)$ puis établir l'expression de $x'(t)m'(t)$.

I.3.c. En déduire, suivant les valeurs de t, dans quelle direction la courbe Γ_2 tourne sa concavité.

I.4. Bâtir le tableau des variations des coordonnées x et y du point $M(t)$.

I.5. Préciser si la courbe Γ_2 admet des asymptotes et des branches infinies.

I.6. Tracer Γ_2 en faisant apparaître les éléments qui facilitent sa construction (points particuliers, tangentes particulières, asymptotes,...).

II

Soit A, B et C trois points distincts de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \bullet (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = 0$.

III

Donner la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{X+1}{(X-1)^4(X-2)^2}\,dX$.

IV

Intégrer l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + 2y = \cos^2 x \quad (E).$$