Option B : Mathématiques et statistiques

L'usage des calculatrices est autorisé

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes

I

On se propose d'étudier les fonctions de la variable réelle x définies par $f_\lambda(x) = (x)^{x^\lambda}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
On note C_λ la courbe associée à f_λ.

1. Déterminer le domaine de définition de f_λ.
2. Étudier suivant les valeurs de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite de $x^\alpha \ln x$ lorsque x tend vers 0^+.
3. *a.* Calculer la limite de $f_\lambda(x)$ quand x tend vers 0^+
   b. En déduire que, pour tout λ, on peut effectuer un prolongement par continuité de f_λ pour $x = 0$.
   c. Déterminer la demi-tangente à C_λ au point d'abscisse $x = 0$.
4. *a.* Calculer la dérivée $f'_\lambda(x)$.
   b. Montrer que suivant les valeurs de λ, la fonction admet, soit un maximum, soit un minimum.
5. *a.* Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $f_\lambda(x)$ au voisinage de 1.
   b. En déduire la position de la courbe C_λ par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 1.
6. Étudier la limite de $f_\lambda(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
7. Étudier la position relative des courbes C_λ et C_μ lorsque $\lambda > \mu$.

II

On appelle « main » un ensemble de 8 cartes à jouer tirées au hasard dans un jeu de 32 cartes.

1. *a.* Combien y a-t-il de mains possibles ?

   b. Combien peut-on former de mains ne contenant aucun as ?

2. Quelles sont les probabilités d'avoir, dans une main :

   a. – au moins un as ;

   b. – les quatre as ;

   c. – un as et un seul ?

III

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire possédant la densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f(x)$ est bien une densité de probabilité.

2. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et la variance $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

3. Déterminer la fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$ de X.

4. Calculer la probabilité attachée à un intervalle quelconque $[\alpha, \beta]$.

IV

On considère un échantillon de 500 élèves. La taille de ces élèves est approximativement distribuée suivant une loi normale de moyenne 150 cm et d'écart-type 20 cm.

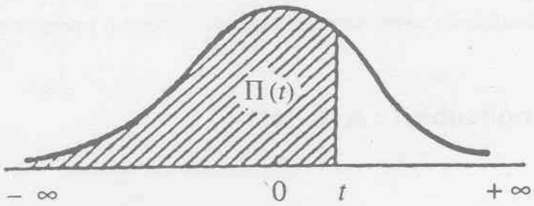
1. Quelle est la probabilité pour un élève d'avoir une taille comprise entre 120 cm et 145 cm ?

2. Quelle est la probabilité pour un élève d'avoir une taille inférieure à 110 cm ?

3. En raison de travaux, la hauteur d'une porte habituellement de 200 cm doit être réduite. De quelle hauteur peut-on la diminuer pour qu'au moins 400 élèves puissent la franchir sans se baisser ?

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTÉGRALE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE, RÉDUITE $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Pi(t) = \Pr \{T < t\}$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 6	0,995 4	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,977 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π (t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. – La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1{,}37$ $\quad \Pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\,7$

pour $t = -1{,}37$ $\quad \Pi(t = -1{,}37) = 1 - 0{,}9147 = 0{,}0853$